Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Konvexní a konkávní funkce

Convex and concave functions

Veronika Procházková

vedoucí práce: prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc.

studijní program: Specializace v pedagogice

studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha, 2020

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Konvexní a konkávní funkce vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Prohlašuji, že odevzdaná elektronická verze bakalářské práce je identická s její tištěnou podobou.

V Praze dne 23. července 2020

Veronika Procházková

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu této práce, kterým byl pan prof. RNDr. Ladislav Kvasz, DSc., za skvělé a velmi přínosné konzultace k bakalářské práci a za jeho vstřícný a milý přístup. Dále bych chtěla poděkovat mé rodině a přátelům za podporu při mých studiích.

ABSTRAKT

Hlavním cílem této bakalářské práce je vytvořit srozumitelný a stručně psaný rozšiřující text respektive výukový materiál k předmětu matematické analýzy zaměřen na téma konvexní a konkávní funkce. Bakalářská práce je určena pro žáky výběrových seminářů středních škol nebo pro studenty vysokých škol bakalářského studia oboru matematika. Práce obsahuje teoretickou a praktickou část. Teoretická část práce obsahuje definice, věty a důkazy související s daným tématem. V této části je kladen důraz na správné pochopení pojmů, a proto je většina z nich ilustrována na obrázcích, které jsou nedílnou součástí práce. První kapitola je věnována samotné funkci a jejím vlastnostem a základním pojmům matematické analýzy jako je limita, spojitost a derivace funkce. Ve druhé kapitole jsou interpretovány a definovány pojmy konvexní a konkávní funkce. Dále jsou zde uvedeny dvě ekvivalentní definice, a to pomocí směrnic sečen funkce a pomocí determinantu třetího řádu. Kapitola také obsahuje definice konvexních a konkávních funkcí v bodě a větu o spojitosti konvexních a konkávních funkcí. Třetí kapitola interpretuje vztah konvexních a konkávních funkcí k derivaci. Je zde vyvinuta analogie k monotonii a derivaci. Práce v této části poukazuje na dvě různá pojetí inflexního bodu a jeho vlastnosti. V poslední kapitole práce je uvedena Jensenova nerovnost, která je s konvexními a konkávními funkcemi úzce spjata. Jensenova nerovnost je zde dokázána a dále je zde uvedeno její užití při důkazech dvou nerovností - aritmeticko-geometrické a Youngovy. Pátá kapitola je praktickou částí práce obsahující řešené úlohy, které využívají vět zavedených v teoretické části práce.

KLÍČOVÁ SLOVA

derivace, inflexní bod, konkávní funkce, konvexní funkce

ABSTRACT

The main goal of this thesis is to create a comprehensible, conscise and more advanced educational text about convex and concave functions, which are studied in mathematical analysis. The text is intended for high-school students attending selective seminars or for university students taking a mathematical undergraduate course. The thesis is composed of a theoretical and a practical part. The theoretical part consists of definitions, theorems and the related proofs. In this part the focus is on correct understanding of all the technical terms, which is why the meaning of the majority of them is illustrated by pictures, which are an integral part of this text. In the first chapter the attention is turned to the concept of a function itself, features of functions and some basic concepts of mathematical analysis like a limit, continuity or a derivative of a function. The second chapter consists of definitions of convex and concave functions and provides an interpretation of these definitions. Two equivalent definitions may be found here. The first definition uses a slope of a secant line, while the other uses a third-order determinant. This chapter also includes definitions of convexity or concavity of a function at a point as well as a theorem on continuity of convex and concave functions. The third chapter interprets the relationship between convexity or concavity of a function and its derivative. An analogy to monotonicity and derivative is provided. This part of the text also shows two different approaches to the concept of an inflection point and its features. In the last theoretical chapter of this thesis Jensen's inequality, which is closely connected to convex and concave functions, is discussed and proved. The text also shows how to use Jensen's inequality to prove two other inequalities, namely the inequality of arithmetic and geometric means and Young's inequality. The fifth chapter is the practical part of this thesis and consists of worked examples, wherein theorems from the theoretical part of the thesis are used.

KEYWORDS

derivative, inflection point, concave functions, convex functions

Obsah

Úvod

Mezi důležité vlastnosti funkce patří konvexnost a konkávnost. Těmito pojmy se zabývalo vícero matematiků a ve vývinu matematické analýzy se jedná spíše o pozdní pojem. V 19. století se detailnějšímu studiu konvexních funkcí zabýval *Valdemar Jensen*, který řekl:

„*Zdá se mi, že pojem konvexní funkce je stejně základní jako funkce kladná nebo funkce rostoucí. Pokud se v tomto nemýlím, tento pojem by měl mít své místo v elementárních výkladech teorie reálných funkcí.*“ (Niculescu a Persson 2006, s. 6)

Práce je určena pro žáky středních škol výběrového semináře či studenty bakalářského studia vysokých škol a je pojata jako rozšiřující učebnice či výukový materiál s řešenými příklady k předmětu Matematická analýza na téma konvexní a konkávní funkce. Cílem této práce je vytvořit srozumitelný a stručný text k danému tématu. V celém textu je kladen důraz na pochopení a srozumitelnost uvedených pojmů, a proto je většina z nich ilustrována na obrázcích. Obrázky jsme vytvořili v programu Geogebra.

Tuto práci jsme rozčlenili do pěti kapitol. V první kapitole uvádíme základní teorii, definice a věty, které jsou nutné pro porozumění textu v celé práci. Jsou zde uvedeny vlastnosti funkcí základní a také infinitezimální vlastnosti jako je limita, spojitost a derivace. Tyto pojmy jsou zde chápány v širokém slova smyslu, ne pouze jako vlastnosti zobrazení, ale jako „nástroj“ sloužící pro určení dané vlastnosti funkce. Jelikož tato kapitola není hlavní náplní práce, uvedené věty zde nedokazujeme. Důkazy vět z této kapitoly čtenář najde v uvedené literatuře. Ve druhé kapitole jsou interpretovány pojmy konvexní funkce a konkávní funkce a jsou zde uvedeny dvě různé ekvivalentní definice konvexních a konkávních funkcí. Třetí kapitola se týká konvexních a konkávních funkcí a jejich vztahu k derivaci, je zde vyvinuta analogie k monotonii a derivaci. Ve čtvrté kapitole uvádíme a dokazujeme tzv. Jensenovu nerovnost pomocí které pak dokazujeme další dvě nerovnosti, a to - aritmeticko-geometrickou a Youngovu nerovnost. Pátá kapitola je praktickou částí této práce a obsahuje řešené úlohy s využitím vět uvedených v této práci. Pro lepší orientaci v symbolice je na straně 66 uveden seznam použitých symbolů.

Kapitola 1

Funkce a jejich vlastnosti

První kapitolu věnujeme funkcím a jejich vlastnostem. Nejdříve uvedeme základní pojmy důležité pro pochopení dalšího textu a poté se podíváme na vlastnosti funkcí. Konvexním a konkávním funkcím je pak věnována celá zvláštní kapitola, a to kapitola 2.

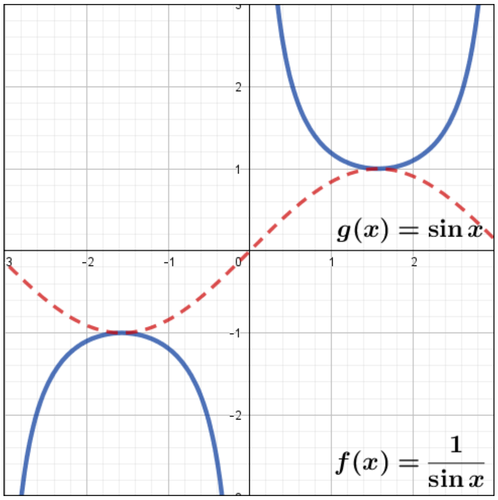
1.1 Základní pojmy

Mezi základní pojmy řadíme pojem funkce, definičního oboru a oboru hodnot, a pojem intervalu.

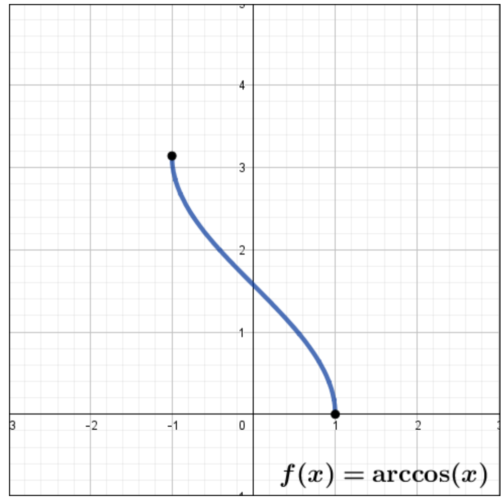
Definice 1 (Funkce)**.** Je-li f zobrazení z množiny X do množiny Y, kde X a Y jsou podmnožiny množiny reálných čísel, pak f nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné** (dále jen **funkce**). (Veselý 2001, s. 43)

Funkci tedy chápeme jako speciální typ zobrazení a zadáváme ji předpisem $y = f(x)$. Každému $x \in \mathbb{R}$ je přiřazeno nejvýše jedno $y = f(x) \in \mathbb{R}$, kde $f(x)$ je funkční hodnota funkce f v bodě x.

Definice 2 (Definiční obor a obor hodnot funkce)**. Definičním oborem funkce** f rozumíme množinu všech $x \in \mathbb{R}$, kterým je přiřazeno nějaké číslo $y = f(x) \in \mathbb{R}$. **Oborem hodnot funkce** f rozumíme množinu všech y takových, že pro nějaké $x \in D(f)$ je $y = f(x)$ a značíme jej $H(f)$. (Veselý 2001, s. 34)



Obrázek 1.1: Definičním oborem funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ je sjednocení všech otevřených intervalů $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Oborem hodnot funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ je sjednocení intervalů $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, \infty)$.



Obrázek 1.2: Definiční obor funkce $f(x) = \arccos x$ je uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$ a obor hodnot funkce f je uzavřený interval $\langle 0, \pi\rangle$.

Definice 3 (Graf funkce)**.** Je-li dána funkce f s definičním oborem $D(f)$, pak množina všech bodů $X = [x, f(x)]$ pro všechna $x \in D(f)$ se nazývá **graf funkce** f. (Dlouhý a kol. 1965, s. 22)

Dále rozlišujeme uzavřený, otevřený a polootevřený (též polouzavřený) interval.

Definice 4 (Ohraničené intervaly)**.** Nechť a, b jsou dvě reálná čísla taková, že $a < b$. Množinu všech reálných čísel x takových, že:

a) $a < x < b$ nazýváme **otevřeným intervalem** a značíme (a, b),

b) $a \leq x \leq b$ nazýváme **uzavřeným intervalem** a značíme $\langle a, b\rangle$,

c) $a \leq x < b$ (resp. $a < x \leq b$) nazýváme **polootevřeným intervalem** a značíme $\langle a, b)$ (resp. $(a, b\rangle$). (Novák 1997, s. 39)

Ve všech případech čísla a, b nazýváme krajními body daných intervalů, ostatní body intervalů nazýváme jeho vnitřními body (též vnitřek intervalu). Všechny tyto intervaly můžeme označit jako ohraničené, jde o podmnožiny reálných čísel. Dále definujeme neohraničené intervaly pomocí symbolů $+\infty$ a $-\infty$ neboli *plus nekonečno* a *mínus nekonečno*. Symbolům $+\infty$ a $-\infty$ neodpovídají žádné konkrétní body na reálné ose, užíváme je pouze k označení intervalů a k odlišení od ostatních bodů číselné osy. Symbol $+\infty$ je ekvivalentní se symbolem ∞, čteme jen *nekonečno*.

Definice 5 (Neohraničené intervaly)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$. Množinu všech reálných čásel x takových, že:

a) $x \geq a$ značíme $\langle a, \infty)$,

b) $x > a$ značíme (a, ∞),

c) $x \leq a$ značíme $(-\infty, a\rangle$,

d) $x < a$ značíme $(-\infty, a)$. (Novák 1997, s. 39)

1.2 Sudé a liché funkce

Sudé a liché funkce můžeme označit souhrnným názvem za funkce s *paritou*, která vyjadřuje vztah hodnot funkce v bodech x a $-x$.

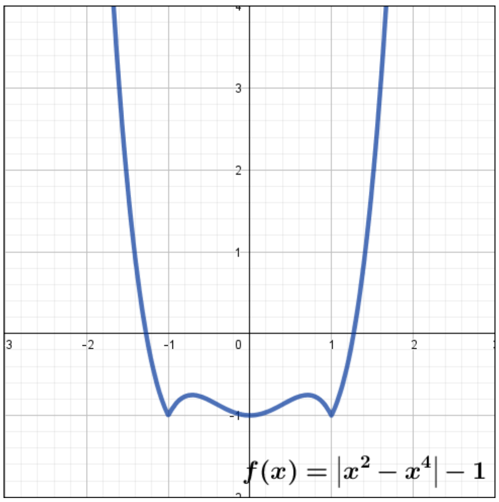
Typickým příkladem sudé funkce je funkce $f : y = x^2$ nebo $f : y = \cos x$. Pro tyto funkce platí, že funkční hodnota v bodě x je rovna funkční hodnotě v bodě $-x$, což je definice sudé funkce. Naopak pro lichou funkci platí, že funkční hodnota v bodě $-x$ je rovna opačné funkční hodnotě v bodě x. Typickým příkladem liché funkce je funkce $f : y = x^3$ nebo $f : y = \sin x$.

Definice 6. Řekneme, že funkce f je:

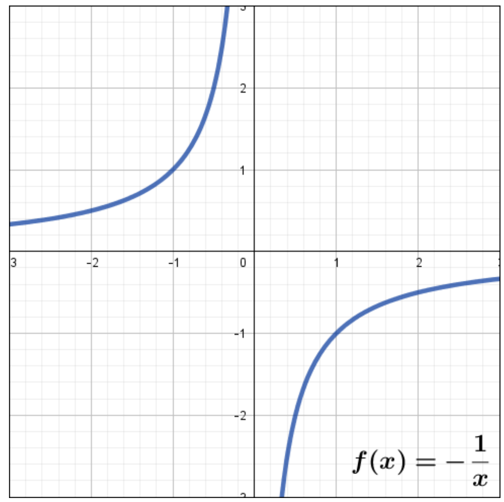
a) **sudá**, pokud $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f) \wedge f(x) = f(-x)$,

b) **lichá**, pokud $\forall x \in D(f)$: $-x \in D(f) \wedge -f(x) = f(-x)$. (Novák 1997, s. 57)

Geometrická interpretace pojmů sudé a liché funkce je taková, že sudá funkce je osově souměrná podle osy y a lichá funkce je středově souměrná podle počátku soustavy souřadnic. Aby funkce měla paritu, je nutná symetrie jejího definičního oboru. Například funkce s definičním oborem $\langle 0, +\infty)$ jistě nemůže být osově souměrná podle osy y ani středově souměrná podle počátku.



Obrázek 1.3: Funkce f je sudá.



Obrázek 1.4: Funkce f je lichá.

Poznámka 1. Ohledně parity se nabízí dvě otázky. První z nich je, zda existuje funkce, která není sudá ani lichá. Ano, funkcí, které nemají paritu je mnoho, například funkce exponenciální. Ve druhé otázce se můžeme ptát naopak - existuje funkce sudá a zároveň lichá? Ano, jde o konstantní funkci $f : y = 0$ s definičním oborem $D(f) = \mathbb{R}$. Nejedná se však o jedinou takovou funkci. Sudou a zároveň lichou funkcí je každá funkce $f : y = 0$ s libovolným symetrickým definičním oborem dle počátku soustavy souřadnic.

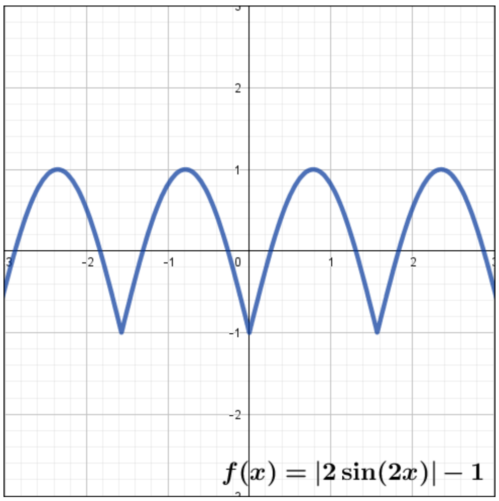
1.3 Periodické funkce

Intuitivně, pokud se funkční hodnoty funkce opakují s periodou $p \in \mathbb{R}^+$, říkáme, že je funkce *periodická*. Mezi nejznámější periodické funkce patří funkce trigonometrické jako *sinus*, *kosinus*, *tangens*, *cotangens*.

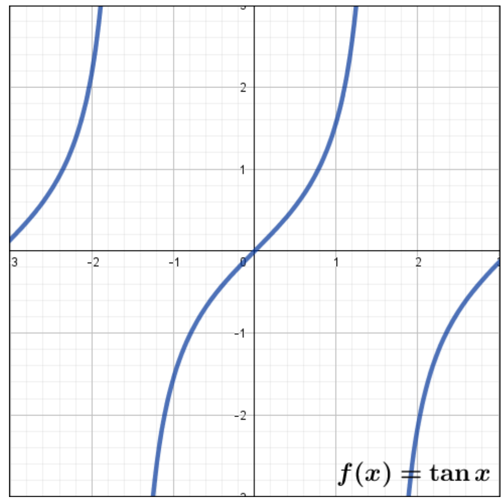
Definice 7. Řekneme, že funkce f je **periodická** právě tehdy, když existuje kladné reálné číslo p takové, že:

$$\forall x \in D(f) : f(x+p) = f(x) \wedge (x \pm p) \in D(f).$$

Reálné kladné číslo p nazýváme **perioda**. Pokud existuje nejmenší kladná perioda p, nazveme ji **hlavní periodou**. (Novák 1997, s. 58)



Obrázek 1.5: Funkce f je periodická, má hlavní periodu π a je sudá.



Obrázek 1.6: Funkce f je periodická, má hlavní periodu π a je lichá.

Funkce může být periodická, ovšem nemusí mít hlavní periodu. Příkladem může být funkce konstantní. Periodickou funkcí je dokonce *Dirichletova funkce*. Dirichletova funkce $\mathrm{D}(x)$ je definována předpisem:

$$\mathrm{D}(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Její periodou je libovolné racionální číslo různé od 0.

1.4 Omezené funkce

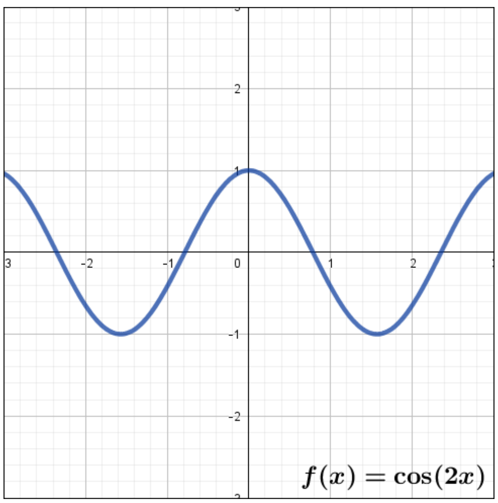
Z názvu je možno usoudit, že omezená funkce je taková, jejíž funkční hodnoty nepřekračují určitou mez. Rozlišujeme *omezenost funkce shora* a *omezenost funkce zdola*. Pokud řekneme, že je funkce *omezená*, myslíme tím, že je omezená shora a zároveň zdola.

Definice 8. Řekneme, že funkce f je:

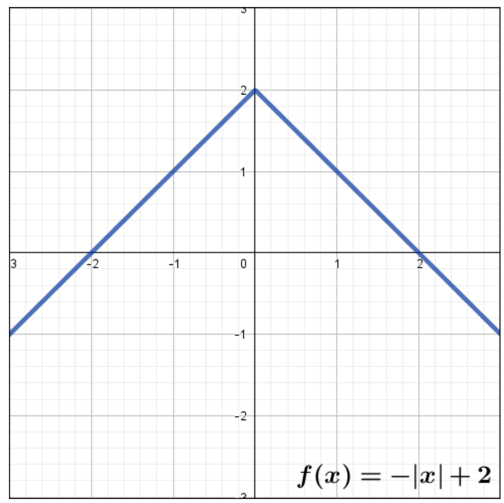
a) **omezená shora**, pokud existuje reálné číslo k takové, že: $\forall x \in D(f) : f(x) \leq k$,

b) **omezená zdola**, pokud existuje reálné číslo h takové, že: $\forall x \in D(f) : f(x) \geq h$,

c) **omezená**, pokud je omezená shora a zároveň omezená zdola. (Novák 1997, s. 57)



Obrázek 1.7: Funkce f je omezená shora a zároveň zdola, je omezená, je sudá.



Obrázek 1.8: Funkce f je omezená shora, není omezená zdola, není omezená, je sudá.

1.5 Monotonní funkce

Monotonnost neboli monotonie funkce popisuje intervaly na kterých je funkce rostoucí či klesající. Speciální případ monotonie je funkce konstantní.

Definice 9. Řekneme, že funkce f je na intervalu $I \subseteq D(f)$:

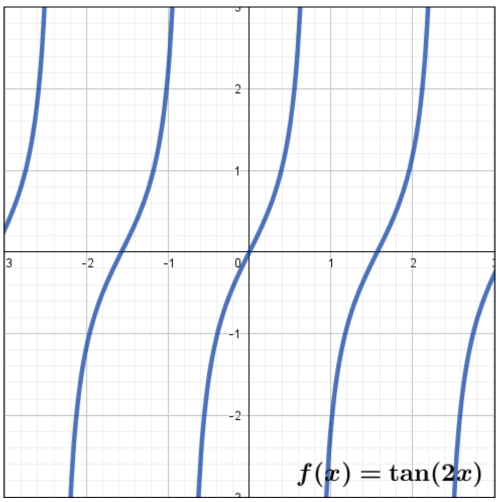
a) **rostoucí**, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

b) **klesající**, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

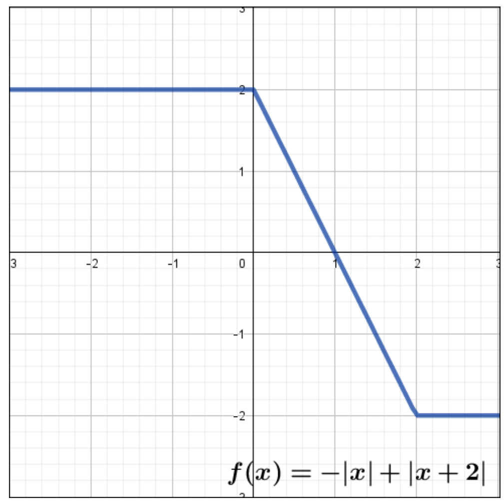
c) **nerostoucí**, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,

d) **neklesající**, pokud $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. (Novák 1997, s. 59)

Navíc pokud $\forall x_1, x_2 \in I : f(x_1) = f(x_2)$ tak říkáme, že je funkce f **konstantní**. Dále říkáme, že je funkce **monotónní**, pokud je nerostoucí nebo neklesající. Pokud je funkce rostoucí nebo klesající, říkáme, že je **ryze monotónní**. (Novák 1997, s. 59)



Obrázek 1.9: Funkce f je rostoucí a ryze monotónní na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2})$, kde $k \in \mathbb{Z}$, je lichá a je periodická s hlavní periodou $\frac{1}{2}\pi$.



Obrázek 1.10: Funkce f je nerostoucí a monotónní, je omezená.

Věta 1. *Pokud je funkce f na intervalu $I \subseteq D(f)$ rostoucí, pak je na I neklesající. Pokud je funkce f na intervalu $I \subseteq D(f)$ klesající, pak je na I nerostoucí.*

Důkaz. Z definice 9 je zřejmé, že pokud platí $f(x_1) < f(x_2)$ (ostrá nerovnost), tak platí i $f(x_1) \leq f(x_2)$ (neostrá nerovnost). Analogicky, pokud platí $f(x_1) > f(x_2)$, tak platí $f(x_1) \geq f(x_2)$. $\square$

1.6 Extrémy funkce

Mezi extrémy funkce řadíme maximum a minimum funkce.

Definice 10. Funkce f má na množině $M \in D(f)$ v bodě $a \in M$ **maximum**, pokud pro každé $x \in M$ platí:

$$f(x) \leq f(a).$$

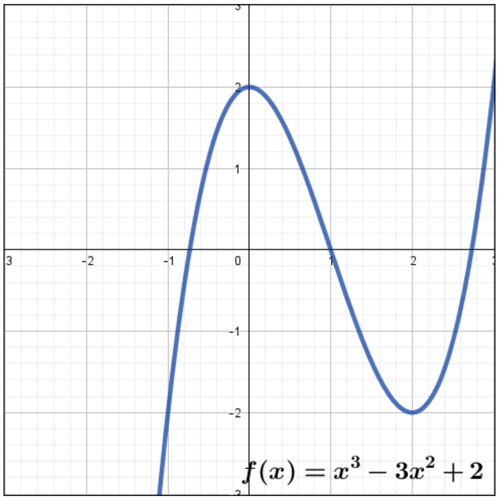
Maximum funkce f značíme jako $\max(f)$. (Grebenča a Novoselov 1955, s. 372)

Definice 11. Funkce f má na množině $M \in D(f)$ v bodě $a \in M$ **minimum**, pokud pro každé $x \in M$ platí:

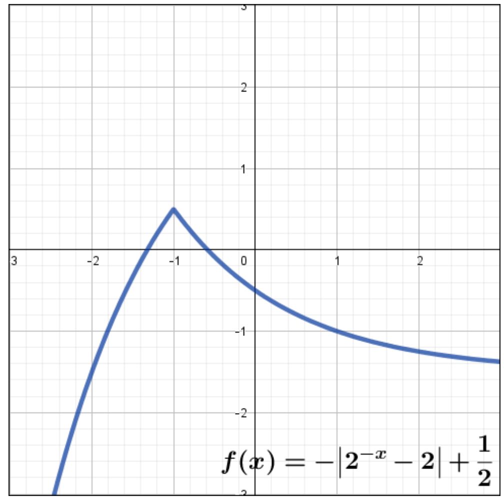
$$f(x) \geq f(a).$$

Minimum funkce f značíme jako $\min(f)$. (Grebenča a Novoselov 1955, s. 372)

Poznámka 2. Je vhodné zde připomenout pojmy *lokální* a *globální* vlastnost funkce. S těmito výrazy se budeme setkávat v různém kontextu. Lokálně popisujeme vlastnost funkce pouze na nějakém podintervalu definičního oboru, zatímco globálně na celém definičním oboru funkce.



Obrázek 1.11: Funkce f má lokální maximum v bodě $x = 0$, lokální minimum v bodě $x = 2$, globální extrémy nemá, je rostoucí na $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 2, +\infty)$, je klesající na $\langle 0, 2\rangle$.



Obrázek 1.12: Funkce f má globální maximum v bodě $x = -1$, globální minimum neexistuje, je shora omezená, je rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a klesající na $\langle -1, \infty)$.

Následující vlastnosti můžeme označit souhrnně jako *infinitezimální*. Slovo *infinitezimální* pochází z latinského *infinitesimalis*, v překladu „nekonečně malý“. Nyní se budeme zabývat *limitou*, *spojitostí* a *derivací* funkce.

1.7 Limita funkce

Jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy je pojem limity funkce. Jedná se o vlastnost funkce, která nám říká, jak se chová daná funkce v okolí nějakého bodu. Před samotnou definicí limity funkce ještě připomeneme důležitý pojem, kterým je okolí bodu funkce. Pomocí limity pak budeme definovat spojitost i derivaci funkce.

Definice 12. **Symetrickým epsilonovým okolím** (dále jen **okolím**) bodu a rozumíme otevřený interval $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, kde ϵ je kladné číslo. (Dlouhý a kol. 1965, s. 78)

Definice 13. Pravým epsilonovým okolím (resp. levým) bodu a rozumíme interval $(a; a+\epsilon)$ (resp. $(a-\epsilon; a)$), kde ϵ je kladné číslo. (Dlouhý a kol. 1965, s. 78)

Pro snazší pochopení pojmu limity uvedeme následující příklad. Mějme zadanou funkci $f : y = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$. Víme, že funkce f je definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Podívejme se tedy na to, jak se „chová“ funkce v okolí bodu $x = 1$. Co se bude dít, pokud budeme postupně dosazovat body blízké $x = 1$? Podívejme se na následující tabulku:

x	0.88	0.90	0.95	0.99	1.02	1.10	1.22
f(x)	2.88	2.90	2.95	2.99	3.02	3.10	3.22

Zvolme například ϵ-ové okolí bodu $x = 1$, tedy okolí $(1-\epsilon, 1+\epsilon)$. Pro $\epsilon = 0.22$ dostáváme interval $(0.88, 1.22)$. Funkční hodnoty dané funkce f pro všechna x z intervalu $(0.88, 1.22)$ (bez bodu $x = 1$) padnou do δ-okolí bodu 3, tedy okolí $(3-\delta, 3+\delta)$. Pro $\delta = 0.22$ dostáváme interval $(2.88, 3.22)$. Znamená to, že limita funkce f v bodě $x = 1$ je v tomto případě rovna 3. Obecně fakt, že limita funkce f pro x jdoucí k x_0 je rovna a zapisujeme jako:

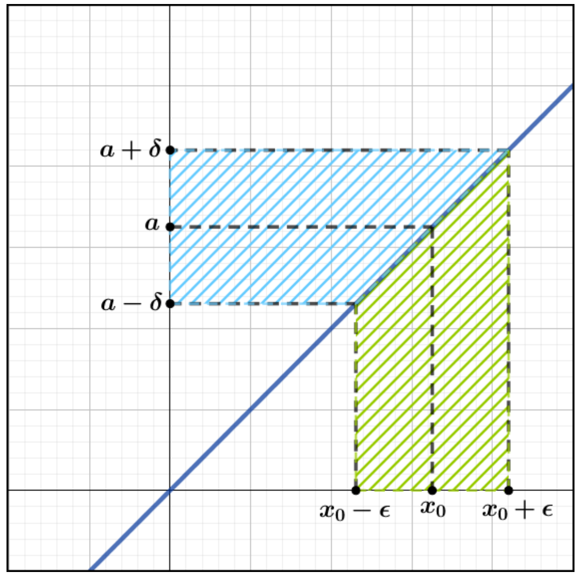
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Pokud je a reálné číslo, říkáme, že funkce má **vlastní limitu**. Naopak pokud limita funkce f je rovna $a = \infty$ nebo $a = -\infty$, tak říkáme, že funkce f má **nevlastní limitu**. Limita funkce existovat nemusí. Typickým příkladem je například funkce *sinus*, která v nekonečnu nabývá hodnot mezi -1 a 1, konkrétně v tomto případě říkáme, že je funkce **oscilující**.

Na počátku vývoje infinitezimálního počtu se přiblížil definici limity italský matematik a filosof *Bernard Bolzano* (1781-1848). Bolzano žil a pracoval v Praze, kde je na Olšanských hřbitovech pochován. Čistě aritmetickou definici limity uvedl roku 1861 *Carl Theodor Wilhelm Weierstrass* (1815-1897). (Veselý 2001, s. 45 a s. 73)

Definice 14. Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **limitu** a, pokud ke každému kladnému číslu ϵ existuje takové kladné číslo δ, že pro všechna $x \neq x_0$ z okolí $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ čísla x_0 patří funkční hodnoty $f(x)$ do okolí $(a-\delta, a+\delta)$ čísla a. Píšeme pak:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \text{ (Dlouhý a kol. 1983, s. 80)}$$



Obrázek 1.13: Ilustrace k definici 14.

Protože mínus nekonečno a plus nekonečno nepovažujeme za konkrétní body na číselné ose, je nutné zvlášť definovat následující limity. Souhrnně plus a mínus nekonečno považujeme za nevlastní body číselné osy. Například funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ má v plus nekonečnu, tj. v nevlastním bodě, limitu rovnou nule (pokud dosazujeme postupně větší x-ové hodnoty, funkční hodnoty se „blíží“ k nule).

Definice 15. Řekneme, že funkce f má **v nevlastním bodě** ∞ **(resp.** $-\infty$**) limitu** a, jestliže ke každému kladnému číslu δ existuje takové číslo x_0, že pro každé $x > x_0$ (resp. $x < x_0$) padne hodnota $f(x)$ do okolí $(a - \delta, a + \delta)$. Píšeme pak:

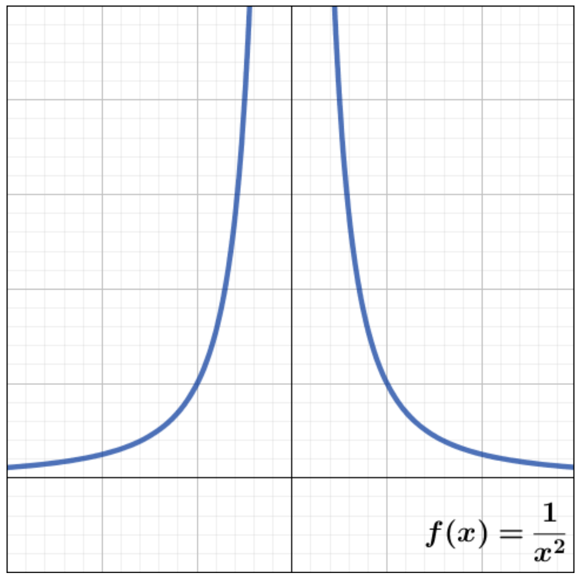
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \text{ (resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = a). \text{ (Dlouhý a kol. 1983, s. 83)}$$

Příkladem funkce, která má v nějakém bodě nevlastní limitu může být $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Pokud dosazujeme postupně menší x-ové hodnoty „blížící“ se nule, funkční hodnoty se „blíží“ k plus nekonečnu.

Definice 16. Řekneme, že funkce f má **v bodě** a **nevlastní limitu** ∞ **(resp.** $-\infty$**)**, jestliže ke každému kladnému číslu k existuje takové kladné číslo ϵ tak, že pro každé $x \neq x_0$

z okolí $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ bodu x_0 je splněna nerovnost $f(x) > k$ (resp. $f(x) < k$). Píšeme pak:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (resp. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\text{). (Dlouhý a kol. 1983, s. 88)}$$



Obrázek 1.14: Funkce f má v bodě 0 limitu rovnou plus nekonečnu. Limita v nekonečnu a i v mínus nekonečnu je rovna 0.

Funkce $f(x) = x^2$ má v nekonečnu limitu rovnou nekonečnu. Nastává případ, kdy má funkce nevlastní limitu v nevlastním bodě. Takovéto případy mohou nastat celkem čtyři různé. Funkce může mít nevlastní limitu ∞ v nevlastním bodě ∞ nebo nevlastní limitu ∞ v nevlastním bodě $-\infty$ nebo nevlastní limitu $-\infty$ v nevlastním bodě ∞ nebo nevlastní limitu $-\infty$ v nevlastním bodě $-\infty$. Uvedeme jednu z těchto definicí, zbylé jsou analogické.

Definice 17. Řekněme, že funkce f má **v nevlastním bodě ∞ nevlastní limitu ∞**, jestliže ke každému kladnému číslu K existuje takové číslo x_0, že pro každé $x > x_0$ je splněna nerovnost $f(x) > k$. Píšeme pak:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty. \text{ (Dlouhý a kol. 1983, s. 88)}$$

Dále definujeme limitu funkce zprava a limitu funkce zleva.

Definice 18. Řekneme, že funkce f má **v bodě** a **limitu zprava** rovnou číslu a, jestliže ke každému kladnému číslu ϵ existuje takové kladné číslo δ tak, že pro všechna $x \neq x_0$ z pravého okolí $\langle x_0, x_0 + \epsilon)$ bodu x_0 padnou hodnoty $f(x)$ do okolí $(a - \delta, a + \delta)$ čísla b. Píšeme pak:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a. \text{ (Dlouhý a kol. 1983, s. 89)}$$

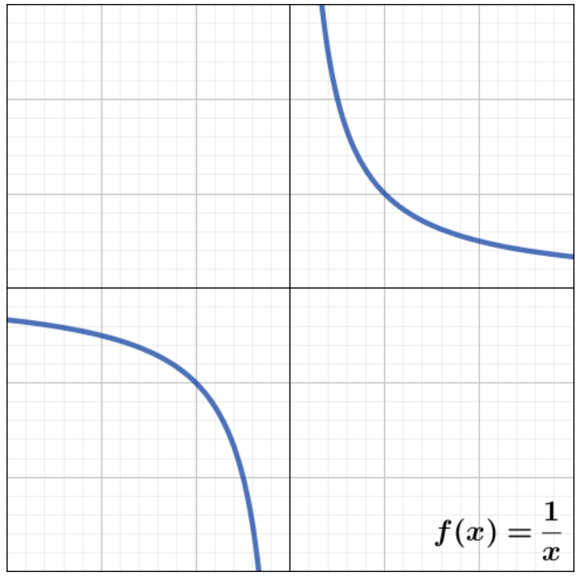
Definice 19. Řekneme, že funkce f má **v bodě** x_0 **limitu zleva** rovnou číslu a, jestliže ke každému kladnému číslu ϵ existuje takové kladné číslo δ tak, že pro všechna $x \neq x_0$ z levého okolí $(x_0 - \epsilon, x_0\rangle$ bodu x_0 padnou hodnoty $f(x)$ do okolí $(a - \delta, a + \delta)$ čísla a. Píšeme pak:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = a. \text{ (Dlouhý a kol. 1983, s. 89)}$$

Otázkou tedy je, jaká je limita funkce $f : y = \dfrac{1}{x}$ v bodě $x = 0$? Dosazujeme-li hodnoty blízké k $x = 0$ z prava, limita je rovna plus nekonečnu a naopak, dosazujeme-li hodnoty blízké k $x = 0$ zleva, limita je rovna mínus nekonečno. Nemůžeme jednoznačně určit, jaká je limita funkce f v bodě $x = 0$. Proto je důležité si uvědomit, že pokud se limita funkce f zprava a zleva nerovná, tak limita funkce f v daném bodě neexistuje. Vyslovení tohoto faktu nám povoluje ekvivalence následující věty.

Věta 2. *Mějme funkci f, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Platí $\lim\limits_{x \to x_0} = a$ právě tehdy, když platí:*

$$\lim_{x \to x_0+} = \lim_{x \to x_0-} = a. \text{ (Novák 1997, s. 89)}$$



Obrázek 1.15: Funkce f v nule limitu nemá. Limita v nekonečnu a i v mínus nekonečnu je rovna 0.

1.8 Spojitost funkce

Geometrická představa spojitosti nám říká, že se jedná o něco nepřerušeného, něco, co můžeme nakreslit jedním tahem. Nelze se vždy spoléhat na geometrický názor, zvlášť v tomto případě. Je nutné rozlišovat *spojitost funkce v bodě* a *spojitost funkce na intervalu.*

Má-li být funkce spojitá v bodě, musí být definována jak v tomto bodě, tak v okolí tohoto bodu. Jak už jsme naznačili, spojitost zadefinujeme pomocí limity funkce.

Definice 20. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \text{ (Novák 1997, s. 99)}$$

Pomocí limity funkce v bodě zprava a zleva definujeme jednostrannou spojitost.

Definice 21. Řekneme, že funkce f je **spojitá zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, platí-li:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0). \text{ (Novák 1997, s. 99)}$$

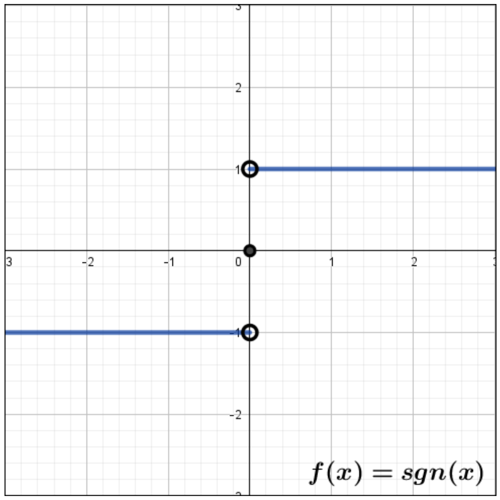
Definice 22. Řekneme, že funkce f je **spojitá zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$,platí-li:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0). \text{ (Novák 1997, s. 99)}$$

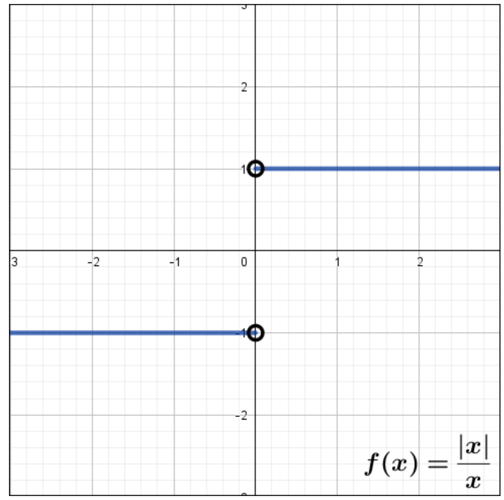
Věta 3. *Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava a zároveň i zleva.* (Novák 1997, s. 99)

Funkce spojité ve všech bodech definičního oboru jsou například funkce konstantní nebo lineární, nebo funkce sinus a kosinus. Taktéž můžeme říct, že jde o spojitost na intervalu, v těchto případech spojitost na podmnožině definičního oboru. Tento pojem shrnuje následující definice.

Definice 23. Řekneme, že funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle \in D(f)$, pokud je spojitá ve všech bodech otevřeného intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva. Analogicky definujeme spojitost na otevřených a polootevřených intervalech. (Novák 1997, s. 103)



Obrázek 1.16: Jednostranné limity funkce f v bodě $x_0 = 0$ se nerovnají, f v tomto bodě není spojitá. Funkce f je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.



Obrázek 1.17: Funkce f je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

1.9 Derivace funkce

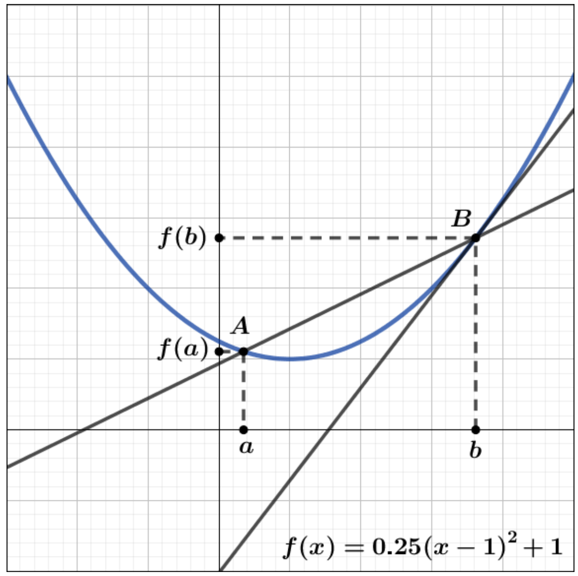
Derivace funkce vyjadřuje směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Obecný předpis lineární funkce je $f(x) = kx + q$, kde $k, q \in \mathbb{R}$ a kde reálné číslo k vyjadřuje právě směrnici dané funkce, neboli tangens úhlu přímky svírající s osou x. Pokud si představíme libovolnou lineární funkci, tak směrnice je rovna tangentě úhlu, neboli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Abychom popsali směrnici tečny libovolné funkce v daném bodě, zavedeme nejprve směrnici sečny. Situace je znázorněna na obrázku 1.18.

Definice 24. Nechť body $A = [a, f(a)], B = [b, f(b)]$ jsou průsečíky sečny a grafu funkce f. **Směrnici sečny** grafu funkce procházející body A a B definujeme jako:

$$\varphi_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \text{ (Veselý 2001, s. 133)}$$



Obrázek 1.18: Ilustrace k definici 24.

Nicméně jak už bylo řečeno, derivace funkce v bodě je směrnice tečny. Při pohledu obrázek 1.18 se můžeme ptát, jakým způsobem se sečna procházející body A a B stane tečnou. Lze si představit, že situace nastane ve chvíli, kdy dva body splynou v jeden, jinak řečeno, když se bod A bude přibližovat k bodu B. Tím se dostáváme k závěru, že derivace funkce v bodě je limita směrnice sečny.

Definice 25. Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f má **derivaci v bodě** x_0, pokud existuje limita:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$. (Veselý 2001, s. 134)

Poznámka 3. Rovnost z definice 25 je velmi často užívána ve tvaru pomocí substituce $h := x - x_0$, neboli:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Pokud je každému bodu definičního oboru funkce f přiřadíme hodnotu derivace funkce v tomto bodě, získáme novou funkci, kterou nazýváme derivací původní funkce a značíme ji f'. V textu budeme pracovat i s vyššími derivacemi. Označením f'' myslíme derivaci funkce f' a říkáme, že f'' je druhá derivace funkce f. Derivace funkce f'' je třetí derivace funkce f a značíme ji f'''. Zápisy čtvrté a vyšších derivací funkce f neboli n-té derivace funkce f značíme $f^{(n)}$.

Definice 26. Derivací funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ definujeme **n-tou derivaci** vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. (Novák 1997, s. 150)

Poznámka 4. Definice je smysluplná pro $n > 1$, proto učiňme úmluvu, že pro $n = 1$ je nultá derivace funkce f je ta samá funkce f. Dále z existence $f^{(n)}(x_0)$ plyne, že funkce $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ jsou definovány na nějakém okolí bodu x_0.

Pokud $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ říkáme, že funkce f má **vlastní derivaci**. Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ říkáme, že funkce f má **nevlastní derivaci**.

Pomocí jednostranných limit zavádíme i jednostranné derivace v bodech.

Definice 27. Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f má **derivaci zprava v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, pokud existuje limita:

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **zprava v bodě** x_0 a značíme ji $f'_+(x_0)$. (Veselý 2001, s. 134)

Definice 28. Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f má **derivaci zleva v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, pokud existuje limita:

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Tuto limitu nazýváme **derivací funkce** f **zleva v bodě** x_0 a značíme ji $f'_-(x_0)$. (Veselý 2001, s. 134)

Podobně jako u limity, derivace funkce v bodě existuje právě tehdy, když se rovná derivace funkce v bodě zleva a zároveň zprava.

Věta 4. *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava a zároveň zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.* (Novák 1997, s. 145)

Pro pochopení dalších kapitol je nutné uvést větu o vztahu derivace a spojitosti. Význam této věty je zřejmý.

Věta 5. *Nechť má funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci $f'(x_0)$. Pak je f v bodě x_0 spojitá.* (Veselý 2001, s. 135)

V oblasti diferenciálního počtu jsou při mnoha důkazech užitečné takzvané *věty o středních hodnotách*. Uvedeme zde dvě věty, konkrétně *Rolleovu* a *Lagrangeovu*. Rolleova věta je speciálním případem Lagrangeovy věty, kterou později využijeme ve dvou důkazech.

První věta nazývána jako *Rolleova* byla v 17. století formulována a dokázána francouzským matematikem *Michelem Rollem* (1652-1719). (Veselý 2001, s. 148)

Věta 6 (Rolle, 1691)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť derivace funkce f existuje ve všech bodech $x \in (a, b)$. Dále nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje v intervalu (a, b) alespoň jedno takové číslo c, že platí $f'(c) = 0$.* (Dlouhý a kol. 1965, s. 223)

Geometrická interpretace říká, že lze nalézt bod $x \in (a, b)$ tak, že vedeme-li tímto bodem tečnu ke grafu funkce, tak tato tečna bude rovnoběžná s osou x. Věta Rolleova a Lagrangeova mají význam i ve fyzice. Rolleova věta říká, že pokud se mění nějaká veličina v čase „hladce“ tak, že na začátku i na konci má stejnou velikost, tak je v nějakém okamžiku okamžitá rychlost změny nulová.

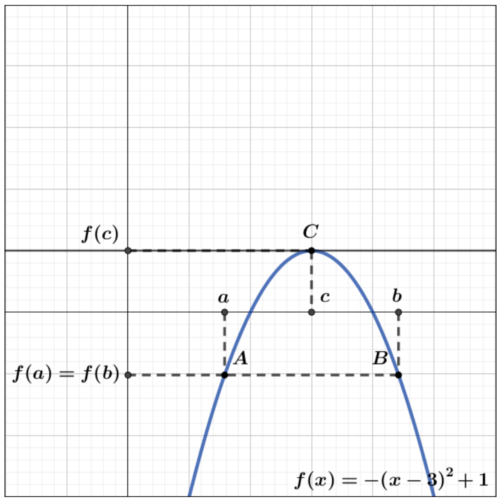
Další větu zformuloval matematik, který zavedl i pojem *derivace*, *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813). (Veselý 2001, s. 148)

Věta 7 (Lagrange, 1797)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť derivace funkce f existuje ve všech bodech $x \in (a, b)$. Pak v intervalu (a, b) existuje alespoň jedno takové číslo c, že platí:*

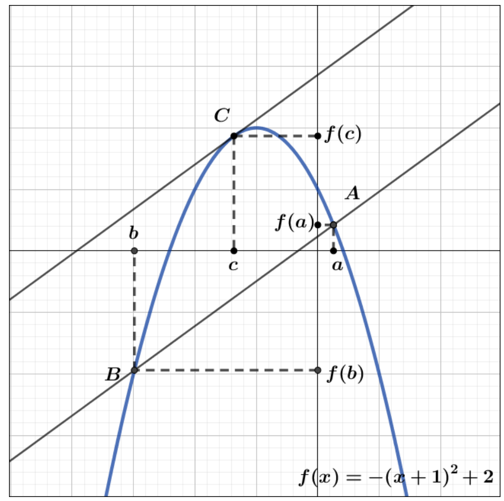
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \text{ (Dlouhý a kol. 1965, s. 226)}$$

Geometrický význam této věty je podobný jako u předchozí věty. Lze najít takový bod $x \in (a, b)$ že tečnu procházející tímto bodem bude rovnoběžná s přímkou procházející body

$A = [a, f(a)]$ a $B = [b, f(b)]$. Fyzikální význam věty je následující: pokud se mění nějaká veličina v čase „hladce“, tak v nějakém okamžimu musí být okamžitá rychlost změny rovna průměrné rychlosti.



Obrázek 1.19: Ilustrace Rolleovy věty.



Obrázek 1.20: Ilustrace Lagrangeovy věty.

Kapitola 2

Konvexní a konkávní funkce

Mezi důležité vlastnosti funkce patří pojem konvexnost, resp. konkávnost. Z latinského slova *convexus* plyne, že se jedná o „vypouklost“ funkce. Konkrétněji – pokud je funkce konvexní, tak je graf funkce vypouklý směrem dolů a naopak, pokud je funkce konkávní, graf je vypouklý směrem nahoru. Pomůckou pro zapamatování může být i to, že grafy kon**V**exních funkcí jsou ve tvaru písmene **V** a grafy konk**Á**vních funkcích jsou ve tvaru písmene **A**.

2.1 Interpretace pojmů a definice konvexních a konkávních funkcí

Za typický příklad konvexní funkce můžeme považovat funkci $f(x) = x^2$. Grafem této funkce je parabola, která je vypouklá směrem dolů. Obrácená parabola, tedy graf funkce $f(x) = -x^2$ je příkladem konkávní funkce. Formalizaci provedeme pouze pro funkce konvexní, pro konkávnost bychom záměnou funkce f za $-f$ dostali analogickou situaci. Využívat budeme právě grafu funkce $f(x) = x^2$. Geometrickou interpretací chceme ukázat, že pokud vedeme sečnu grafem dané funkce f, tak část grafu funkce vymezená průsečíky sečny a grafu funkce f leží pod touto sečnou.

Uvažujme tedy funkci $f(x) = x^2$. Zvolme dva body na grafu funkce f X_0 a X_1

tak, aby x-ová souřadnice bodu $X_0 = [x_0; f(x_0)]$ byla menší než x-ová souřadnice bodu $X_1 = [x_1, f(x_1)]$. Dále zvolme bod $X = [x, f(x)]$ tak, že $x_0 < x < x_1$. Jak už jsme naznačili, intuitivní představa nám říká, že vedeme-li přímku body X_0 a X_1, tak bod X leží pod touto přímkou. Z obrázku níže je vidno, že bod X musí ležet „pod“ bodem X'. Pro reálné číslo $\lambda \in (0, 1)$ bod X můžeme ekvivalentně vyjádřit jako:

$$X = [x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0); f(x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0))].$$

Po úpravách získáváme:

$$X = [(1 - \lambda) \cdot x_0 + \lambda x_1; f((1 - \lambda) \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1)].$$

Taktéž pomocí $\lambda \in (0, 1)$ můžeme vyjádřit bod X' jako:

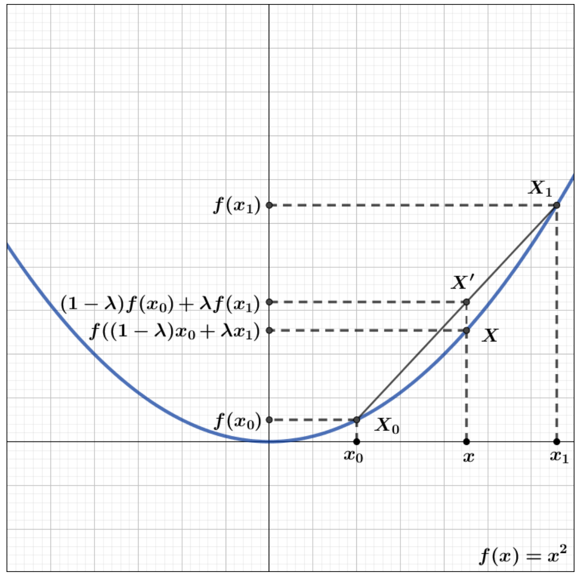
$$X' = [(1 - \lambda) \cdot x_0 + \lambda x_1; (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1)].$$

Pro konvexní funkci pak musí platit nerovnost:

$$f((1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1),$$

kde λ je reálné číslo z intervalu $(0, 1)$.

Situace je znázorněna na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1

Definice 29. Funkci f definovanou na intervalu I, kde $I \subset \mathbb{R}$, nazýváme **konvexní**, pokud pro každé dva body x_0, x_1 a $\lambda \in (0,1)$ platí nerovnost:

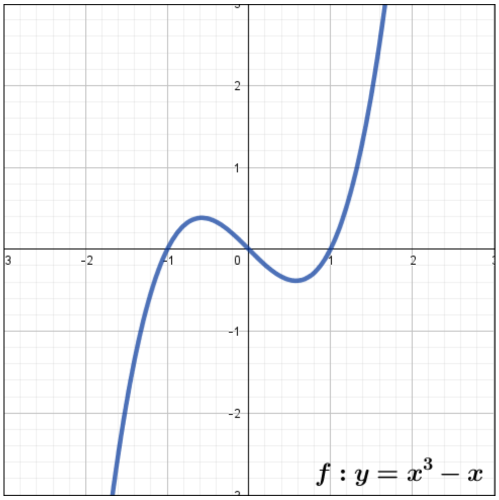
$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1). \text{ (Veselý 2001, s. 189)}$$

Pokud v definici nahradíme znaménko nerovnosti za $\geq$, dostaneme definici **konkávní** funkce.

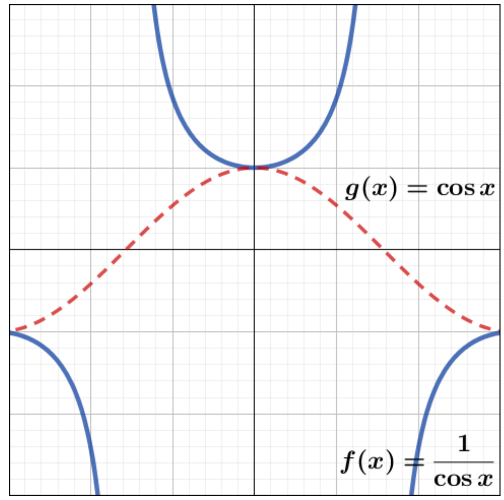
Definice 30. Funkci f definovanou na intervalu I, kde $I \subset \mathbb{R}$, nazýváme **ryze konvexní**, pokud pro každé dva body x_0, x_1 a $\lambda \in (0,1)$ platí nerovnost:

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) < (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1). \text{ (Veselý 2001, s. 189)}$$

Pokud v definici nahradíme znaménko nerovnosti za $>$, dostaneme definici **ryze konkávní** funkce.



Obrázek 2.2: Funkce f je ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a ryze konvexní na intervalu $\langle 0, \infty)$.



Obrázek 2.3: Funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a ryze konkávní na intervalech $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Poznámka 5. Konvexnost se nemusí týkat pouze funkcí, určitý význam má tento pojem i v oblasti geometrie. Rozlišujeme například *konvexní a nekonvexní úhel*, konvexní úhel má velikost v intervalu $\langle 0°, 180°\rangle$ nebo 360°, nekonvexní nabývá velikosti v intervalu $(180°, 360°)$. Dále se můžeme setkat s pojmem *konvexní množina*. Jde o nějakou plochu v eukleidovské rovině, kde spojnice každých dvou bodů patří do dané množiny neboli:

$$\forall A, B \in M : |AB| \subseteq M.$$

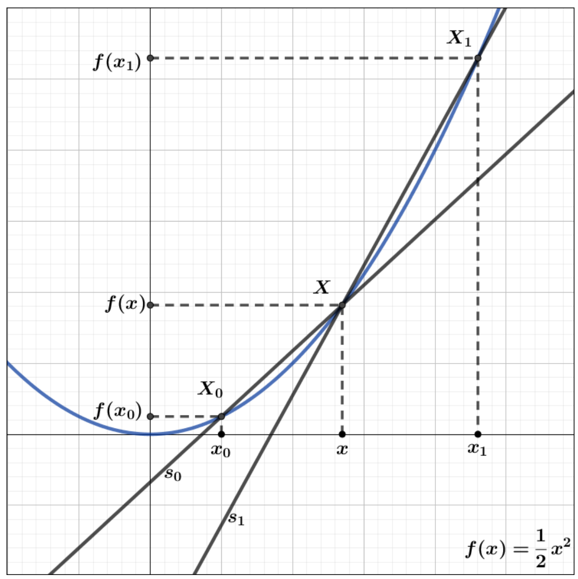
Věta 8. *Pokud je funkce f na intervalu $I \subseteq D(f)$ ryze konvexní, pak je na I konvexní. Pokud je funkce f na intervalu $I \subseteq D(f)$ ryze konkávní, pak je na I konkávní.*

Důkaz. Platnost této věty je zřejmá. □

Poznámka 6. Věnujme zvláštní pozornost grafu funkce $f(x) = |x| - 1$. Tato funkce je konvexní na celém svém definičním oboru a zároveň je lineární na intervalech $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 0, \infty)$. Na těchto intervalech je funkce konvexní a zároveň konkávní. Dokonce každá lineární funkce je konvexní a zároveň konkávní.

2.2 Ekvivalentní definice konvexních a konkávních funkcí

Vypouklost funkce můžeme popsat i pomocí směrnic dvou sečen funkce. Předpokládejme graf funkce $f(x) = x^2$ a body $X_0 = [x_0, f(x_0)], X = [x, f(x)], X_1 = [x_1, f(x_1)]$ takové, že platí $x_0 < x < x_1$. Pokud vedeme sečny s_0, s_1 takové, že s_0 prochází body X_0, X a s_1 je dána body X, X_1, tak musí platit, že směrnice sečny s_0 je menší než směrnice sečny s_1. Situace je znázorněna na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4

Věta 9. *Nechť je funkce f definovaná na intervalu I, kde $I \subset \mathbb{R}$.*

Funkce f je konvexní právě tehdy, když platí:

$$\forall x_0, x, x_1, \in I : x_0 < x < x_1 \Rightarrow \varphi_f(x_0, x) \leq \varphi_f(x, x_1).$$

Funkce f je konkávní právě tehdy, když platí:

$$\forall x_0, x, x_1, \in I : x_0 < x < x_1 \Rightarrow \varphi_f(x_0, x) \geq \varphi_f(x, x_1).$$

Funkce f je ryze konvexní právě tehdy, když platí:

$$\forall x_0, x, x_1, \in I : x_0 < x < x_1 \Rightarrow \varphi_f(x_0, x) < \varphi_f(x, x_1).$$

Funkce f je ryze konkávní právě tehdy, když platí:

$$\forall x_0, x, x_1, \in I : x_0 < x < x_1 \Rightarrow \varphi_f(x_0, x) > \varphi_f(x, x_1).$$

(Veselý 2001, s. 190)

Důkaz. Větu budeme dokazovat pouze pro konvexní funkce, pro další vypouklosti je důkaz analogický.

„$\Rightarrow$“: Víme, že libovolný bod x můžeme vyjádřit pomocí λ tak, že:

$$x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda(x_1).$$

Z toho plyne, že:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Po dosazení λ do nerovnosti v definici konvexní funkce dostáváme:

$$f(x) \leq \left(1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1). \tag{2.1}$$

Postupnými algebraickými úpravami dojdeme k požadované nerovnosti. Nejdříve nerovnost 2.1 upravíme:

$$f(x) \leq \left(\frac{x_1 - x_0 - x + x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1),$$
$$f(x) \leq \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1).$$

Protože výraz $x_1 - x_0$ je kladný, nerovnost můžeme tímto výrazem vynásobit:

$$f(x)(x_1 - x_0) \leq f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_0). \tag{2.2}$$

V závorce $(x_1 - x_0)$ na levé straně nerovnosti použijeme „trik“ přičtení a odečtení x:

$$f(x)(x_1 - x + x - x_0) \leq f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_0).$$

Levou stranu nerovnosti roznásobíme:

$$f(x)(x_1 - x) + f(x)(x - x_0) \leq f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_0).$$

Nyní se postupnými úpravami snažíme dostat nerovnost uvedenou ve větě, kterou dokazujeme:

$$
\begin{aligned}
f(x)(x_1 - x) - f(x_0)(x_1 - x) &\le -f(x)(x - x_0) + f(x_1)(x - x_0), \\
(f(x) - f(x_0))(x_1 - x) &\le (-f(x) + f(x_1))(x - x_0), \\
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\le \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.
\end{aligned}
$$

Dle definice 24 je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností:

$$\varphi_f(x_0, x) \le \varphi_f(x, x_1).$$

Došli jsme k požadované nerovnosti, čímž jsme dokázali implikaci zleva doprava.

„$\Rightarrow$“: Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat zpětnými kroky důkazu implikace $\Leftarrow$. Všechny kroky v důkazu $\Leftarrow$ jsou totiž ekvivalentní. $\square$

Nerovnost označenou 2.2 v důkazu věty 9 můžeme upravit i jiným způsobem. V závorce $(x_1 - x)$ na pravé straně nerovnosti použijeme „trik“ přičtení a odečtení x_0 a roznásobíme:

$$
\begin{aligned}
f(x)(x_1 - x_0) &\le f(x_0)(x_1 - x_0 + x_0 - x) + f(x_1)(x - x_0), \\
f(x)(x_1 - x_0) &\le f(x_0)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x - x_0).
\end{aligned}
$$

Algebraickými úpravami dojdeme k nerovnosti porovnávající směrnice $\varphi_f(x_0, x)$ a $\varphi_f(x_0, x_1)$:

$$
\begin{aligned}
f(x)(x_1 - x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0) &\le f(x_1)(x - x_0) - f(x_0)(x_1 - x_0), \\
(f(x) - f(x_0))(x_1 - x_0) &\le (f(x_1) - f(x_0))(x - x_0), \\
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\le \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\
\varphi_f(x_0, x) &\le \varphi_f(x_0, x_1).
\end{aligned}
$$

A nebo ještě jinak - „trik“ použijeme v poslední závorce na pravé straně nerovnosti, přičteme a odečteme x_1 a poté roznásobíme:

$$
\begin{aligned}
f(x)(x_1 - x_0) &\le f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x - x_1 + x_1 - x_0), \\
f(x)(x_1 - x_0) &\le f(x_0)(x_1 - x) - f(x_1)(x_1 - x) + f(x_1)(x_1 - x_0),
\end{aligned}
$$

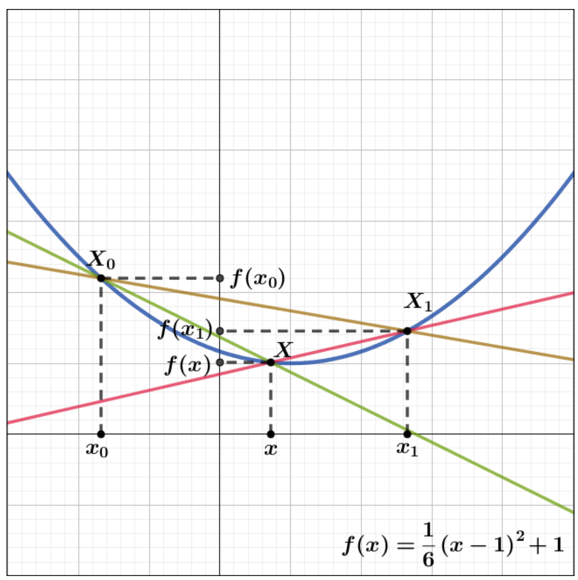
Algegraickými úpravami dojdeme k nerovnosti porovnávající směrnice $\varphi_f(x_0, x)$ a $\varphi_f(x, x_1)$:

$$f(x_1)(x_1 - x) - f(x_0)(x_1 - x) \leq f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x)(x_1 - x_0),$$
$$(f(x_1) - f(x_0))(x_1 - x) \leq (f(x_1) - f(x))(x_1 - x_0),$$
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x},$$
$$\varphi_f(x_0, x_1) \leq \varphi_f(x, x_1).$$

Tímto jsme navíc ukázali, že konvexnost můžeme charakterizovat pro všechna $x_0, x, x_1 \in I$ takové, že $x_0 < x < x_1$ pomocí jedné ze tří nerovností:

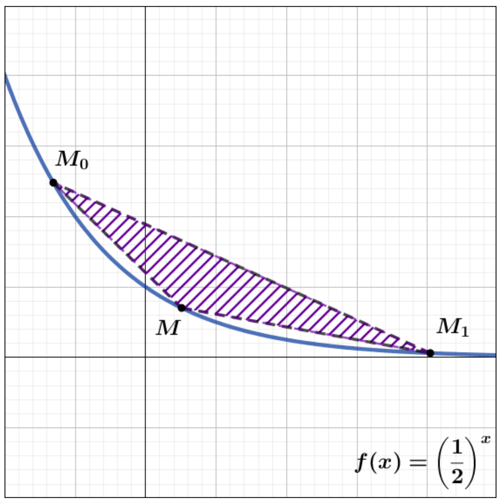
$$\varphi_f(x_0, x) \leq \varphi_f(x_0, x_1) \leq \varphi_f(x, x_1).$$

Situace je znázorněna na obrázku 2.5.

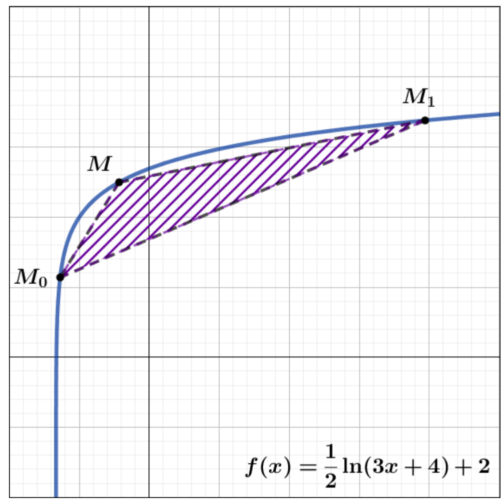


Obrázek 2.5

Konvexní a konkávní funkce lze také definovat pomocí determinantu třetího řádu. Mějme tři body grafu konvexní funkce f $M_0 = [x_0, f(x_0)]$, $M = [x, f(x)]$, $M_1 = [x_1, f(x_1)]$ takové, že $x_0 < x < x_1$. Dále mějme vektory $m_0 = (x_0, f(x_0,), 1)$, $m = (x, f(x), 1)$, $m_1 = (x_1, f(x_1), 1)$ určující matici třetího řádu A. V našem případě geometrický význam determinantu matice A je dvojnásobek obsahu trojúhelníku M_0, M, M_1 (Grebenča a Novoselov 1955, s. 401). Protože je posloupnost vektorů m_0, m, m_1 pravotočivá (proti směru hodinových ručiček), tak je determinant matice A kladný (Grebenča a Novoselov 1955, s. 401). Tato situace však nastane pouze tehdy, je-li bod M pod spojnicí bodů M_0 a M_1, tedy když je funkce konvexní (situace je znázorněna na obrázku 2.6). Naopak pokud bychom uvažovali funci f konkávní, tak je posloupnost vektorů m_0, m, m_1 levotočivá (po směru hodinových ručiček) a determinant matice A je záporný, bod M tedy musí ležet nad spojnicí bodů M_0 a M_1 (situace je znázorněna na obrázku 2.7).



Obrázek 2.6



Obrázek 2.7

Věta 10. *Funkce $f(x)$ se nazývá ryze konvexní na intervalu $\langle a, b\rangle$ právě tehdy, když po libovolné tři hodnoty argumentů x_0, x, x_1 z intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $x_0 < x < x_1$ a platí-li nerovnost:*

$$\begin{vmatrix} x_0 & f(x_0) & 1 \\ x & f(x) & 1 \\ x_1 & f(x_1) & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Záměnou znaménka nerovnosti $>$ za $<$ získáváme větu o ryze konkávní funkci. (Grebenča a Novoselov 1955, s. 401)

Důkaz. Dokážeme implikaci zprava doleva.

„$\Leftarrow$“: Dle Sarrusova pravidla pro výpočet determinantu můžeme nerovnost ve větě zapsat ekvivalentně jako:

$$x_0 f(x) + x f(x_1) + x_1 f(x_0) - f(x)(x_1) - x_0 f(x_1) - x f(x_0) > 0.$$

Vytkneme postupně $f(x)$, $f(x_1)$ a $f(x_0)$:

$$f(x)(x_0 - x_1) + f(x_1)(x - x_0) + f(x_0)(x_1 - x) > 0.$$

V závorce $(x_0 - x_1)$ vytkneme mínus a poté použijeme „trik“ přičtení a odečtení x:

$$-f(x)(x_1 - x_0 + x - x) + f(x_1)(x - x_0) + f(x_0)(x_1 - x) > 0. \tag{2.3}$$

Roznásobíme $f(x)(x_1 - x_0 + x - x)$ a dostaneme:

$$-f(x)(x_1 - x) - f(x)(x - x_0) + f(x_1)(x - x_0) + f(x_0)(x_1 - x) > 0.$$

Nyní se postupnými algebraickými úpravami snažíme dostat uvedenou nerovnost ve větě 9:

$$\begin{gathered} f(x_1)(x - x_0) - f(x)(x - x_0) > f(x)(x_1 - x) - f(x_0)(x_1 - x) \\ (x - x_0)(f(x_1) - f(x)) > (x_1 - x)(f(x) - f(x_0)) \\ \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} > \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \end{gathered}$$

neboli:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

Dle věty 9 je funkce f ryze konvexní a věta je dokázána.

„$\Rightarrow$“: Implikaci $\Rightarrow$ lze dokázat zpětnými kroky důkazu implikace $\Leftarrow$. Všechny kroky v důkazu $\Leftarrow$ jsou ekvivalentní. □

2.3 Funkce konvexní a konkávní v bodě

V předchozí kapitole jsme si mohli všimnout, že jsme nedefinovali vypouklosti funkce v bodě. K těmto definicím už je potřeba první derivace funkce v daném bodě.

Mějme funkci $f(x) = x^2$ a její graf. Obecná rovnice tečny je $y = kx + q$. Chceme zjistit rovnici tečny v daném bodě $X_0 = [x_0, y_0]$ funkce f. Dosazením do obecné rovnice tečny získáváme vztah:

$$y_0 = kx_0 + q.$$

Vyjádříme q:

$$q = y_0 - kx_0.$$

Provedeme zpětné dosazení této rovnice do obecné rovnice tečny:

$$y = kx + y_0 - kx_0.$$

Protože k není nic jiného než derivace funkce f v bodě x_0, tak dosazením $f'(x_0)$ za k získáváme rovnost vyjadřující rovnici tečny funkce f v bodě $[x_0, y_0]$:

$$y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0,$$

a po úpravě dostáváme:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,$$

neboli:

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Bod $X = [x, f(x)]$ grafu funkce f leží nad tečnou v bodě $X_0 = [x_0, f(x_0)]$ grafu funkce f právě tehdy, je-li splněna nerovnost:

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Bod $X = [x, f(x)]$ grafu funkce f leží pod tečnou v bodě $X_0 = [x_0, f(x_0)]$ grafu funkce f právě tehdy, je-li splněna nerovnost:

$$f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Definice 31. Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **konvexní v bodě** x_0, pokud existuje $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna x v intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ platí nerovnost:

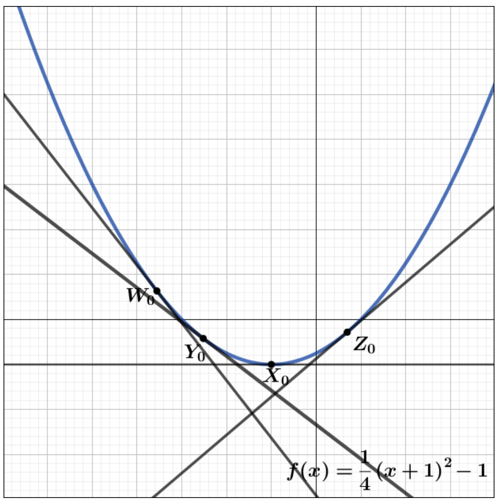
$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \text{ (Novák 1997, s. 199)}$$

Záměnou nerovnosti $\geq$ za $>$ získáme definici funkce **ryze konvexní v bodě** x_0.

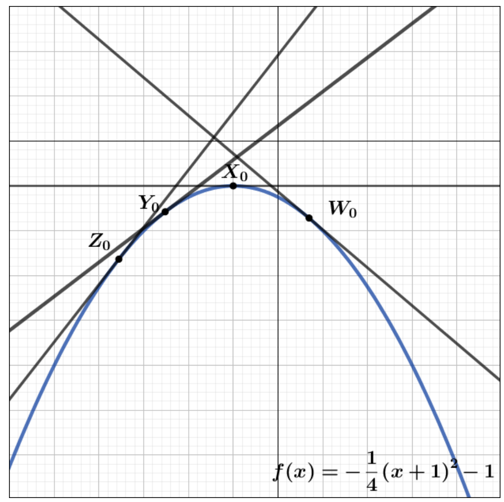
Definice 32. Nechť funkce f má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je **konkávní v bodě** x_0, pokud existuje $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ takové, že pro všechna x v intervalu $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ platí nerovnost:

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \text{ (Novák 1997, s. 199)}$$

Záměnou nerovnosti $\leq$ za $<$ získáme definici funkce **ryze konkávní v bodě** x_0.



Obrázek 2.8: Funkce f je ryze konvexní ve všech bodech definičního oboru.



Obrázek 2.9: Funkce f je ryze konkávní ve všech bodech definičního oboru.

Věta 11. *Pokud je funkce f konvexní ve všech bodech otevřeného intervalu (a, b), tak je f na (a, b) spojitá. Analogická věta platí pro ryze konvexní, konkávní a ryze konkávní funkce.*

Důkaz. Větu dokážeme pouze pro funkce konvexní. Pro další vypouklosti je důkaz analogický. Pokud je funkce f konvexní ve všech bodech intervalu (a, b), tak dle definice 31 má v těchto bodech vlastní derivaci. Dle věty 5 je funkce f v těchto bodech spojitá. $\square$

Kapitola 3

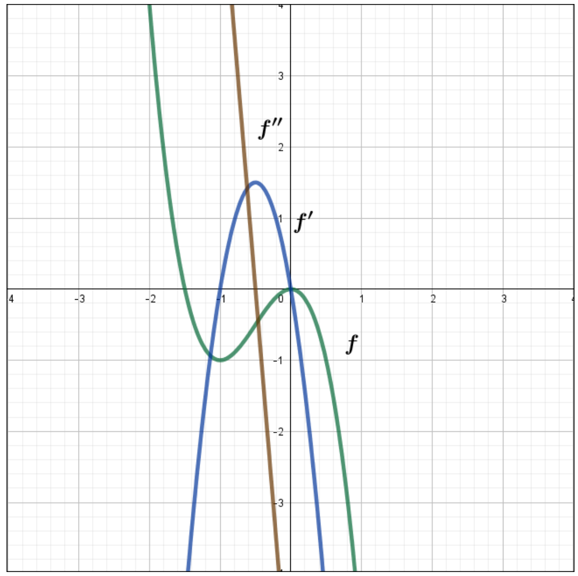
Vztah konvexních a konkávních funkcí k derivaci

Jak už jsme naznačili, derivace je efektivní nástroj využívaný pro určení průběhu funkce. V této kapitole se podíváme na to, jak pomocí derivace zjistit intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce.

3.1 Intervaly konvexnosti a konkávnosti

Věty potřebné ke zjištění těchto intervalů jsou úzce spjaty s intervaly monotonie funkce. Pokusíme se ukázat analogii vět o monotonii k vypouklosti funkcí. V případě, že známe graf funkce, lze snadno určit intervaly kovexnosti a konkávnosti. Pokud ale graf neznáme a chceme určit tyto intervaly, lze použít derivaci a snadno tyto intervaly nalézt. Podívejme se na následující příklad.

Mějme funkci $f : y = -2x^3 - 3x^2$. Graf funkce je na obrázku 3.1. Všimněme si, že funkce f ryze konvexní na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{2})$ a ryze konkávní na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$. Tyto intervaly bychom správně měly brát za intervaly určené intuitivně. Nemáme zatím žádný důkaz toho, že jsou intervaly správné.



Obrázek 3.1

Určíme první a druhou derivaci funkce f:

$$f'(x) = (-2x^3 - 3x^2)' = -6x^2 - 6x,$$
$$f''(x) = (-6x^2 - 6x)' = -12x - 6.$$

Funkce f, f' a f'' jsou znázorněny na následujícím obrázku, kterému nyní věnujeme pozornost. Jak už jsme zmínili, funkce f je ryze konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Zároveň však první derivace f je na tomto intervalu rostoucí a druhá derivace f je na tomto intervalu větší než 0. Analogicky na intervalu $(-\frac{1}{2}, \infty)$ je funkce f ryze konkávní, f' je zde klesající a f'' menší než 0. Toto užití má obecnou platnost.

Věta 12 (Monotonie a první derivace funkce)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť existuje derivace f na intervalu (a, b). Pak platí:*

a) je-li ve všech bodech $x \in (a, b) : f'(x) > 0$, je f rostoucí na (a, b),

b) je-li ve všech bodech $x \in (a, b) : f'(x) < 0$, je f klesající na (a, b),

c) je-li ve všech bodech $x \in (a, b) : f'(x) \geq 0$, je f neklesající na (a, b),

d) je-li ve všech bodech $x \in (a, b) : f'(x) \leq 0$, je f nerostoucí na (a, b). (Veselý 2001, s. 144)

Důkaz. Důkaz věty rozdělíme na čtyři části, dle výše uvedených bodů.

a) Mějme dva body x_0, x_1 z intervalu (a, b) tak, že $x_0 < x_1$. Chceme dokázat, že za daných předpokladů platí, že $f(x_0) < f(x_1)$. Z věty 7 víme, že existuje bod c z intervalu (a, b) tak, že:
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c),$$
neboli:
$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0). \tag{3.1}$$
Protože $x_0 < x_1$ a také $f'(c) > 0$ tak v nerovnosti 3.1 je na pravé straně kladné číslo. Tudíž platí, že $f(x_1) > f(x_0)$ (neboli $f(x_0) < f(x_1)$).

b) Mějme dva body x_0, x_1 z intervalu (a, b) tak, že $x_0 > x_1$. Chceme dokázat, že za daných předpokladů platí, že $f(x_0) > f(x_1)$. Z věty 7 víme, že existuje bod c z intervalu (a, b) tak, že:
$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c),$$
neboli:
$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0). \tag{3.2}$$
Protože $x_0 < x_1$ a také $f'(c) < 0$ tak v nerovnosti 3.2 je na pravé straně záporné číslo. Tudíž platí, že $f(x_1) < f(x_0)$ (neboli $f(x_0) > f(x_1)$).

c) Důkaz je modifikací důkazu bodu a).

d) Důkaz je modifikací důkazu bodu b).

□

Věta 13 (Vypouklost a první derivace funkce)**.** *Nechť má funkce f vlastní derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu $I = (a, b)$. Pak platí:*

a) je-li funkce f' rostoucí na I, pak je funkce f ryze konvexní na I,

b) je-li funkce f' klesající na I, pak je funkce f ryze konkávní na I, *c) je-li funkce f' neklesající na I, pak je funkce f konvexní na I,*

d) je-li funkce f' nerostoucí na I, pak je funkce f konkávní na I. (Došlá a Kuben 2003, s. 124)

Důkaz. Důkaz věty rozdělíme na čtyři části, dle výše uvedených bodů.

a) Za předpokladu, že má f derivaci v kažém bodě z intervalu (a, b) víme, že f' je rostoucí (a, b). Chceme dokázat, že je funkce f ryze konvexní. Zvolme $x_0, x_1, x_2 \in (a, b)$ tak, že $x_0 < x_1 < x_2$. Dle věty 7 o střední hodnotě existují body $c_1, c_2 \in (a, b)$ tak, že:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c_1),$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_2),$$

a také platí nerovnost $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2$. Protože $f'(x)$ je rostoucí, tak platí:

$$f'(c_1) < f'(c_2),$$

neboli:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Z věty 9) plyne, že funkce f je ryze konvexní, což jsme chtěli dokázat.

b) Za předpokladu, že má f derivaci v kažém bodě z intervalu (a, b) víme, že f' je klesající (a, b). Chceme dokázat, že je funkce f ryze konkávní. Zvolme $x_0, x_1, x_2 \in (a, b)$ tak, že $x_0 < x_1 < x_2$. Dle věty 7 o střední hodnotě existují body $c_1, c_2 \in (a, b)$ tak, že:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(c_1),$$
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c_2),$$

a také platí nerovnost $x_0 < c_1 < x_1 < c_2 < x_2$. Protože $f'(x)$ je klesající, tak platí:

$$f'(c_1) > f'(c_2),$$

neboli:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Z věty 9) plyne, že funkce f je ryze konkávní, což jsme chtěli dokázat.

c) Důkaz je modifikací důkazu bodu a).

d) Důkaz je modifikací důkazu bodu b).

$\square$

Věta 14 (Vypouklost a druhá derivace funkce)**.** *Nechť má funkce f vlastní druhou derivaci ve všech bodech otevřeného intervalu $I = (a, b)$. Pak platí:*

a) je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ryze konvexní na I,

b) je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f ryze konkávní na I,

c) je-li $f''(x) \leq 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I,

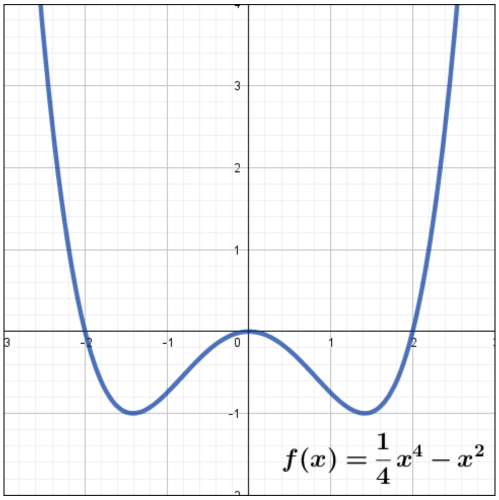
d) je-li $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I. (Došlá a Kuben 2003, s. 125)

Důkaz. Věta je důsledkem věty 12 a věty 13. Dokážeme pouze pro bod a). Z věty 12 vyplývá, že je f' rostoucí na intervalu I a díky větě 13 můžeme říct, že je ryze konvexní. Obdobně pro body b), c), d). $\square$

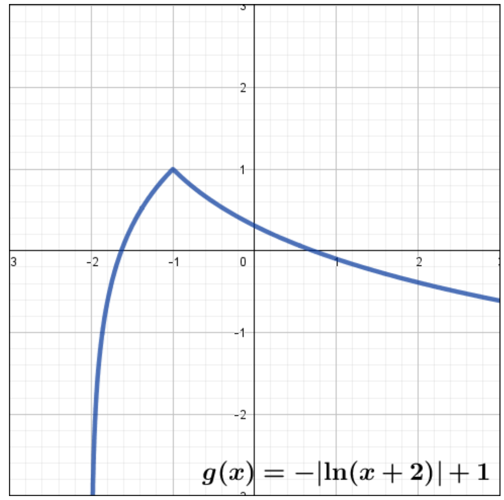
3.2 Inflexní bod

Bod, ve kterém se mění konvexnost na konkávnost zazýváme *inflexní.* V tomto bodě přechází graf funkce z polohy „pod tečnou“ do polohy „nad tečnou“ (či naopak).

Mějme funkce $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ a $g(x) = -|\ln(x+2)| + 1$, grafy těchto funkcí jsou znázorněny na následujících obrázcích. Jak vidíme na obrázku 3.2, konvexnost se mění na konkávnost (a naopak) ve dvou bodech funkce f, tedy v $x = \frac{3}{2}$ a v $x = -\frac{3}{2}$. Všimněme si, že graf přechází právě v těchto bodech z poloh pod tečnou do poloh nad tečnou (a naopak)



Obrázek 3.2



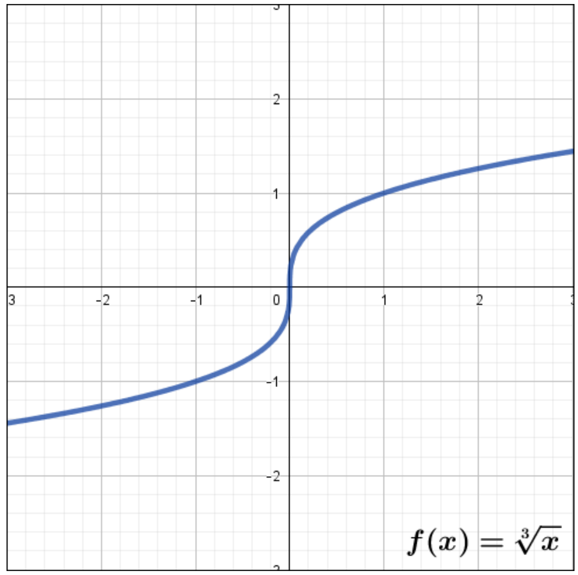
Obrázek 3.3

hladce. Naopak u grafu funkce g na obrázku 3.3, tento „hladký přechod“ v bodě $x = -1$ chybí, funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, -1\rangle$ a konvexní na $\langle -1, \infty)$.

Hlavní rozdíl těchto bodů u funkce f a g je ten, že všechny výše zmíněné body funkce f mají vlastní derivaci, zatímco bod $x = -1$ funkce g derivaci nemá. Tím se dostáváme ke dvěma různým způsobům zavedení definice inflexního bodu. Jeden způsob definice předpokládá oboustrannou vlastní derivaci v daném bodě, což v praxi znamená, že funkce mění polohy nad či pod tečnou hladce (také je v tomto bodě spojitá, dle věty 5). Ve druhém pojetí v bodě derivace nemusí existovat. Častější je první pojetí infexního bodu, kde bereme v úvahu pouze „hladké“ přechody z konvexnosti na konkávnost nebo naopak. Druhé pojetí inflexního bodu není v literatuře tak časté, definice může vypadat následovně:

„*Číslo a se nazývá inflexní bod, existuje-li takové okolí bodu a, že pro $x < a$ je oblouk grafu funkce $f(x)$ konvexní a pro $x > a$ konkávní, nebo naopak pro $x < a$ je oblouk grafu $f(x)$ konkávní a pro $x > a$ konvexní.*“. (Grebenča a Novoselov 1953, s. 399)

Podíváme se ještě na funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (f je znázorněna na obrázku 3.4). Intuitivně by funkce měla mít inflexi v bodě $x_0 = 0$. V tomto bodě graf funkce f přechází z konvexního intervalu na konkávní. Derivace v tomto bodě existuje (přechod je hladký), ale je nevlastní. Proto předpokladem inflexního bodu je existence derivace v daném bodě, a to vlastní nebo nevlastní. Pokud je však derivace v daném bodě nevlastní, funkce v něm musí být navíc spojitá.



Obrázek 3.4

Definice 33 (Inflexní bod)**.** Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ derivaci. Je-li tato derivace nevlastní, předpokládáme navíc, že je funkce f spojitá v bodě x_0. Řekneme, že bod x_0 je **inflexním bodem funkce** f, jestliže:

a) existuje δ okolí bodu x_0 takové, že funkce f je ryze konkávní na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a je ryze konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$, nebo

b) existuje δ okolí bodu x_0 takové, že funkce f je ryze konvexní na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a je ryze konkávní na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. (Došlá a Kuben 2003, s. 127)

Podíváme-li se na funkci $f(x) = x^3$, tak dle definice je inflexním bodem počátek kartézské soustavy souřadnic. Tento bod funkce splňuje předpoklady z definice a jelikož nerovnost $f''(x) > 0$, neboli $6x > 0$, platí pro $\forall x \in (0, \infty)$, tak právě na intervalu $(0, \infty)$ je f konvexní (dle věty 14). Naopak řešením nerovnosti $6x < 0$ je interval $(-\infty, 0)$, funkce f je zde konkávní. Dle bodu a) v definici 33 je tedy inflexní bod právě v $x_0 = 0$. Můžeme si všimnout, že v tomto bodě je druhá derivace nulová.

Věta 15. *Nechť x_0 je inflexní bod funkce f a nechť existuje druhá derivace funkce v bodě x_0. Pak $f''(x_0) = 0$.* (Došlá a Kuben 2003, s. 127)

Důkaz. Pravdivost věty je zřejmá. Díky větě 14 víme, že pokud je $f''(x_0)$ větší než nula, tak je f ryze konvexní a pokud je $f''(x_0) < 0$, tak je funkce ryze konkávní. Dle definice 33 je bod x_0 inflexním bodem funkce f a platí pro něj $f''(x_0) = 0$. □

Zpětná implikace věty 15 neplatí. Druhá derivace nějakého bodu funkce může být nulová, ale nemusí se jednat o inflexní bod. Například funkce $f(x) = x^2$. Tato funkce je ryze konvexní na celém $D(f)$ a neexistuje žádný bod, ve kterém přechází graf funkce z polohy „pod tečnou“ do polohy „nad tečnou“. V bodě $x_0 = 0$ je druhá derivace funkce f rovna nule a nejedná se o inflexní bod. Tento bod je v literatuře často nazývám jako tzv. *bod podezřelý z inflexe*, tj. právě bod x_0, pro který platí $f''(x_0) = 0$.

Věta 16. *Nechť $f''(x_0) = 0$. Pokud existuje ϵ-ové okolí bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ platí, že $f''(x_0) < 0$ a pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ platí, že $f''(x) > 0$ (či naopak), tak potom je bod x_0 inflexním bodem funkce f.* (Došlá a Kuben 2003, s. 127)

Důkaz. Víme, že existuje druhá derivace v bodě x_0 a proto víme i to, že první derivace v bodě x_0 je konečná. Díky větě 14 můžeme říct, že pro všechna $x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ je funkce f na tomto intervalu ryze konkávní, protože $f''(x_0) < 0$. Stejně tak je funkce f ryze konvexní pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$. Dle definice 33 je x_0 inflexním bodem funkce f. □

Nyní se podíváme na zajímavou větu a zároveň na jednu z mála vět, kde je použita třetí derivace. Vezmeme-li si funkci $f(x) = x^3$, můžeme si po opakovaném zderivování všimnout následujícího: $f'(x) = 3 \cdot x^2$, $f''(x) = 3 \cdot 2 \cdot x$ a $f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot$. Zvlášť po dosazení $x = 0$ dostáváme: $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, ale $f'''(0) = 3! \neq 0$.

Věta 17. *Nechť $f''(x_0) = 0$ a nechť $f'''(x_0) \neq 0$. Pak je x_0 inflexním bodem funkce f.* (Došlá a Kuben 2003, s. 127)

Důkaz. Víme, že existuje třetí derivace v bodě x_0 a proto víme i to, že druhá derivace v bodě x_0 je konečná a z toho vyplývá, že druhá derivace v bodě x_0 je buď rostoucí (je-li $f''(x_0) > 0$) nebo klesající (je-li $f''(x_0) < 0$). Existuje tedy ϵ-okolí, kde pro všechna

$x \in (x_0 - \epsilon, x_0)$ je $f''(x_0) < 0$ a pro všechna $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ je $f''(x_0) > 0$ (či naopak). Nyní je postup důkazu shodný jako u důkazu věty 16. □

Poznámka 7. Pro zajímavost uvedeme zobecnění věty 17 pro vyšší řády derivací funkce. Toto zobecnění však není vhodné pro praktické použití při hledání inflexního bodu u složitějších funkcí. Všimněme si následujícího:

$$
\begin{aligned}
&f_2(x) = x^3, f_2'(0) = 0, f_2''(0) = 0, f_3'''(0) \neq 0,\\
&f_3(x) = x^4, f_3'(0) = 0, f_3''(0) = 0, f_3'''(0) = 0, f_3^4(0) \neq 0,\\
&f_4(x) = x^5, f_4'(0) = 0, f_4''(0) = 0, f_4'''(0) = 0, f_4^4(0) = 0, f_4^5(0) \neq 0,\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Můžeme tušit, že zobecnění věty 17 vypadá následovně. Nechť f je funkce, $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ a $n > 1$. Nechť f má v bodě x_0 vlastní nebo nevlastní n-tou derivaci a nechť $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k < n$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Pak platí:

a) pokud n je liché, tak funkce f má v bodě x_0 inflexní bod,

b) pokud n je sudé, tak funkce f nemá v bodě x_0 inflexní bod a navíc v případě, že $f^{(n)}(x_0) > 0$, tak je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní a v případě, že $f^{(n)}(x_0) < 0$, tak je funkce f v bodě x_0 ryze konkávní. (Novák 1997, s. 204)

Kapitola 4

Užití konvexnosti a konkávnosti

V této kapitole se podíváme na a užití konvexnosti a konkávnosti. Konkrétně na jednu z často používaných nerovností v matematických důkazech vět týkajících se nerovností, a to na *Jensenovu nerovnost.* Poté ukážeme praktické užití této nerovnosti v dalších dvou nerovnostech, a to konkrétně v *aritmeticko-geometrické nerovnosti* a v *Youngově nerovnosti.*

4.1 Jensenova nerovnost

Celým jménem *Johann Ludwig William Valdemar Jensen* (1859-1956), dánský matematik a fyzik se zabýval studiem konvexních a konkávních funkcí, detailněji studoval zobecnění těchto funkcí. Avšak uvedl i nerovnost, jejíž užití nalezneme v mnoha důkazech, ale i praktických úlohách, tato nerovnost nese název *Jensenova nerovnost.* Věnoval se však také i dalším tématům, jeho jméno můžeme znát z oblasti matematických řad – uvedl jedno z kritérií pro vyšetření konvergence. (Veselý 2001, s. 90 a s. 211)

Klíčová k pochopení Jensenovy nerovnosti je *konvexní kombinace bodů.* Podívejme se ještě zpětně na obrázek 2.1, konkrétně na vyjádření x-ové souřadnice bodu X mezi X_0 a X_1. V eukleidovské rovině $\mathbb{R}^2$ tento bod bychom popsali pomocí vektorů tak, že bychom k X přičetli λ násobek vzdálenosti mezi X a Y. V našem případě tedy nic jiného než

$x+ \lambda \cdot (x_1 - x_0)$ a aby x bylo mezi x_0 a x_1, musí být λ v intervalu $(0,1)$. Tvar $x_0+\lambda\cdot(x_1-x_0)$ můžeme ještě jednoduše upravit:

$$x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0) = x_0 - \lambda \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 = (1 - \lambda) \cdot x_0 + \lambda \cdot x_1 = p \cdot x_0 + q \cdot x_1.$$

Použili jsme substituci $1 - \lambda = p$ a $\lambda = q$, z čehož vyplývá, že $p + q = 1$ za předpokladu $p, q \in (0, 1)$. Výrazu $p \cdot x_0 + q \cdot x_1$ říkáme *konvexní kombinace bodů* x_0, x_1.

Definice 34. Nechť $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in (0, 1)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Pak:

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n$$

se nazývá **konvexní kombinace bodů** $x_1, x_2, \cdots, x_n$. (Niculescu a Persson 2006, s. 102)

Nyní se pokusíme interpretovat geometrický význam Jensenovy nerovnosti. Uvažujme graf konvexní funkce $f(x) = x^2$. Dále mějme body R a S takové, že:

$$R = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n)],$$
$$S = [\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n, \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)],$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$ a $x_1, x_2, \cdots x_n$ libovolná. X-ové souřadnice bodů R a S jsou konvexními kombinacemi bodů $x_1, \cdots, x_n$. Y-ová souřadnice bodu R je funkční hodnota této konvexní kombinace bodů. Y-ová souřadnice bodu S je konvexní kombinace funkčních hodnot $f(x_1), \cdots, f(x_n)$.

Rozebereme si tři případy, pro které budeme zkoumat vzájemnout polohu bodů R a S. Konkrétně případy pro $n = 1$, pro $n = 2$ a poté pro $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$.

Pokud $n = 1$ tak je případ triviální. Pokud $n = 1$, tak $\lambda_1 = 1$, bod R má souřadnice $[x_1, f(x_1)]$ a bod S má souřadnice $[x_1, f(x_1)]$. Body mají totožné souřadnice a splývají v jeden bod.

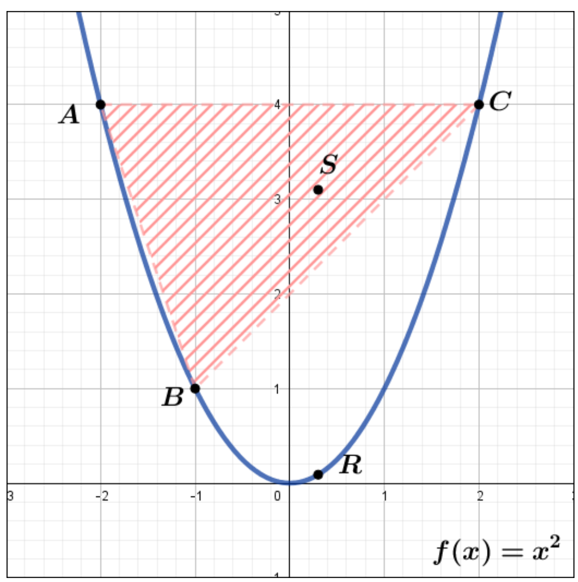
Volbou $n = 2$ získáváme $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Vyjádříme-li si λ_2, tak zjistíme, že $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$. Bod R má souřadnice $[\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda) x_2, f(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) x_2)]$. Bod S má souřadnice $[\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda_1 f(x_1) + (1 - \lambda_1) f(x_2)]$. Bod S leží pod bodem R, jedná se přímo o definici konvexní funkce, analogickou situaci jsme už znázornili na obrázku 2.1.

Složitější případ nastává při volbě $n \geq 3$. Proto zvolíme konkrétní hodnoty pro $n = 3$ a poté se pokusíme naši geometrickou představu zobecnit pro $n > 3$. Mějme tedy $n = 3$ a konkrétní hodnoty $\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = 0.3$ a $\lambda_3 = 0.5$. Dále zvolme $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 2$. Dosazením do obecného tvaru souřadnic bodů R a S získáváme:

$$\begin{aligned}
R &= [0.2 \cdot (-2) + 0.3 \cdot (-1) + 0.5 \cdot (2), f(0.2 \cdot (-2) + 0.3 \cdot (-1) + 0.5 \cdot (2))] = \\
&= [0.3, f(0.3)] = [0.3, 0.09] \\
S &= [0.2 \cdot (-2) + 0.3 \cdot (-1) + 0.5 \cdot (2), 0.2 \cdot 4 + 0.3 \cdot 1 + 0.5 \cdot 5] = \\
&= [0.3, 3.1]
\end{aligned}$$

Zakreslíme-li si tuto situaci do kartézské soustavy souřadnic, tedy funkci f, body R a S a dále body $A = [x_1, f(x_1)]$, $B = [x_2, f(x_2)]$ a $C = [x_3, f(x_3)]$, zjistíme, že bod S leží uvnitř konvexního trojúhelníku s vrcholy A, B a C (situace je znázorněna na obrázku 4.1).

Pokud situaci zobecníme pro $n > 3$, tak bod S bude vždy ležet uvnitř konvexního n-úhelníku s vrcholy $[x_i, f(x_i)]$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.



Obrázek 4.1

Věta 18 (Jensenova nerovnost)**.** *Reálná funkce f definována na intervalu I je konvexní právě tehdy, když pro všechna $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že:*

$$\lambda_1 + \ \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1,$$

platí nerovnost:

$$\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n) \geq f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n).$$

Záměnou znaménka nerovnosti $\geq$ za $\leq$ získáváme větu pro konkávní funkce. (Niculescu a Persson 2006, s. 8)

Důkaz. „$\Leftarrow$“: Nechť pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \langle 0, 1\rangle$ taková, že:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$$

platí:

$$\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \cdots + \lambda_n \cdot f(x_n) \geq f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n).$$

Chceme dokázat, že za daných předpokladů je funkce f konvexní na I. Speciálně zvolíme $n = 2$ a dostáváme nerovnost:

$$\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \geq f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2).$$

Také $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, neboli $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$. Dosazením získáváme nerovnost:

$$(1 - \lambda_2)f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \geq f((1 - \lambda_2)x_1 + \lambda_2 x_2). \tag{4.1}$$

Dle definice 29 je funkce f konvexní.

„$\Rightarrow$“: Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pokud $n = 1$, případ je triviální, protože nastává rovnost. Pokud $n = 2$, jedná se o definici konvexní funkce 29. Nyní předpokládejme, že nerovnost platí pro $n = k$, tedy:

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_k f(x_k) \geq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k). \tag{4.2}$$

S využitím indukčního předpokladu (nerovnost 4.2) chceme dokázat platnost nerovnosti pro $n = k + 1$:

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \geq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}). \tag{4.3}$$

Začneme úpravou pravé strany nerovnosti 4.3. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $\lambda_{k+1} \neq 1$:

$$f\left((1-\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right) + \lambda_{k+1}x_{k+1}\right) =$$
$$= f\left(\lambda_{k+1}x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right)\right).$$

Protože je funkce f konvexní, tak platí nerovnost:

$$f\left(\lambda_{k+1}x_{k+1} + (1-\lambda_{k+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right)\right) \leq$$
$$\leq \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + \left((1-\lambda_{k+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right)\right).$$

Protože platí:

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_{k+1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} = 1,$$

a také:

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}, \ldots, \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}} \in \langle 0, 1 \rangle,$$

tak využitím indukčního předpokladu získáváme nerovnost:

$$f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right) \leq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}f(x_k).$$

Tudíž:

$$\lambda_{k+1}f(x_{k+1}) + \left((1-\lambda_{k+1})f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{k+1}}x_k\right)\right) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

Tedy platí:

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) \geq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}).$$

Tím je implikace $\Rightarrow$ dokázána. $\square$

4.2 Aritmeticko-geometrická nerovnost

S využitím Jensenovy nerovnosti můžeme dokázat tzv. *aritmeticko-geometrickou* nerovnost, zkráceně A-G nerovnost. Aritmetický průměr n čísel je součet n hodnot vydělený jeho počtem, tedy n. Geometrický průměr n čísel je n-tá odmocnina ze součinu n čísel. V oboru statistiky se jedná o často používané hodnoty. Aritmetický průměr vyjadřuje průměrnou hodnotu součtu n čísel a geometrický průměr vyjadřuje průměrnou hodnotu součinu n čísel. A-G nerovnost říká, že geometrický průměr n čísel je vždy menší nebo roven než aritmetický průměr n čísel, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Věta 19 (Aritmeticko-geometrická nerovnost)**.** *Pro libovolná nezáporná čísla* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *platí nerovnost:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}. \text{ (Došlá a Kuben 2003, s. 181)}$$

Důkaz. Pro $x_i = 0$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je platnost věty triviální. Předpokládejme tedy $x_i > 0$, kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Mějme funkci $f(x) = \ln(x)$, $D(f) = \mathbb{R}^+$. Dle věty 14 je funkce f konvexní na celém $D(f)$ (dokonce ryze konvexní na celém $D(f)$). S využitím Jensenovy nerovnosti můžeme říct, že platí:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) &\geq \frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n), \\
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &\geq \frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(x_n).
\end{aligned}$$

Využitím logaritmických vzorců upravíme pravou stranu nerovnosti:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &\geq \ln(x_1)^{\frac{1}{n}} + \ln(x_2)^{\frac{1}{n}} + \cdots + \ln(x_n)^{\frac{1}{n}}, \\
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &\geq \ln\left((x_1)^{\frac{1}{n}} \cdot (x_2)^{\frac{1}{n}} \cdots (x_n)^{\frac{1}{n}}\right), \\
\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) &\geq \ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností, kterou chceme dokázat:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

□

4.3 Youngova nerovnost

Jak už jsme naznačili, ukážeme ještě použití Jensenovy nerovnosti při důkazu tzv. Youngovy nerovnosti. Tato nerovnost je pojmenována po anglickém matematikovi se jménem William Henry Young, který se především věnoval oboru matematické analýzy. Youngova nerovnost vyjadřuje vztah součinu dvou nezáporných čísel a mocnin těchto dvou nezáporných čísel.

Věta 20 (Youngova nerovnost)**.** *Pro libovolná reálná čísla $a \geq 0$ a $b \geq 0$ a pro libovolná reálná čísla $p > 1$ a $q > 1$ taková, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí nerovnost:*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.\text{ (Niculescu a Persson 2006, s. 14)}$$

Důkaz. Využijeme Jensenovy nerovnosti a logaritmické funkce $f(x) = \ln(x)$, $D(f) = \mathbb{R}^+$. Dle věty 14 je funkce konkávní na celém $D(f)$. S využitím Jensenovy nerovnosti pro konkávní funkci můžeme říct, že platí:

$$\ln\left(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q.$$

Pravou stranu nerovnosti upravíme pomocí logaritmických vzorců:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} b^q\right) &\geq \frac{1}{p} \cdot p \cdot \ln a + \frac{1}{q} \cdot q \cdot \ln b,\\
\ln\left(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} b^q\right) &\geq \ln a + \ln b,\\
\ln\left(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} b^q\right) &\geq \ln(a \cdot b).
\end{aligned}$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností, kterou jsme chtěli dokázat, tedy:

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Kapitola 5

Řešené příklady

Úloha 1. Nalezněte intervaly, na kterých je funkce $f(x) = 2 \cdot \dfrac{x^2}{x^2-1}$ konvexní resp. konkávní.

Řešení. Definiční obor funkce f je roven $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Využijeme věty 14. Nejdříve zjistíme první derivaci funkce f a poté druhou derivaci funkce f, neboli derivaci funkce f':

$$f'(x) = \left(2 \cdot \frac{x^2}{x^2-1}\right)' = 2 \cdot \frac{2x(x^2-1) - x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = -4 \cdot \frac{x}{(x^2-1)^2}, x \in D(f),$$

$$f''(x) = \left(-4 \cdot \frac{x}{(x^2-1)^2}\right)' = -4 \cdot \frac{(x^2-1)^2 - x(2(x^2-1)2x)}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x-1)^3(x+1)^3}, x \in D(f').$$

Řešením nerovnice $f''(x) > 0$ jsou intervaly $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$ a dle věty 14 je zde funkce f ryze konvexní. Řešením nerovnice $f''(x) < 0$ je interval $(-1, 1)$ a dle věty 14 je zde funkce f ryze konkávní.

Závěr: Dle věty 14 je funkce f ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$ a je ryze konkávní na intervalu $(-1, 1)$.

Úloha 2. Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ a určete intervaly na kterých je funkce konvexní resp. konkávní.

Řešení. První derivace funkce f je rovna $12x^3 - 4x, x \in D(f)$ a druhá derivace funkce f je rovna $36x^2 - 4, x \in D(f')$. Řešením nerovnice $f''(x) \geq 0$ je interval $(-\infty, -\frac{1}{3}\rangle$ a $\langle \frac{1}{3}, \infty)$ a řešením nerovnice $f''(x) \leq 0$ je interval $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$.

Závěr: Dle věty 14 je funkce f konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{3}\rangle$ a $\langle\frac{1}{3}, \infty)$ a konkávní na $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle$. Funkce má dva inflexní body a to v $x = \frac{1}{3}$ a v $x = -\frac{1}{3}$.

Úloha 3. Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ a určete intervaly na kterých je funkce konvexní resp. konkávní.

Řešení. Definiční obor funkce f je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Provedeme první a druhou derivaci funkce f:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2}, x \in D(f),$$
$$f''(x) = \left(\frac{e^x x - e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x(x - 1 + e^x)x^2 - e^x(x-1)2x)}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}.$$

Výrazy e^x a $(x^2 - 2x + 2)$ jsou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ kladné. Výraz x^3 je kladný pro všechna $x \in (0, \infty)$ a záporný pro všechna $x \in (-\infty, 0)$.

Závěr: Dle věty 14 je funkce f ryze konvexní na intervalu $(0, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$. Funkce nemá inflexní body.

Úloha 4. Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ a určete intervaly na kterých je funkce konvexní resp. konkávní.

Řešení. Definiční obor funkce je roven $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$. Provedeme první a druhou derivaci funkce f:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}, x \in D(f),$$
$$f''(x) = \left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)' = -\frac{-\sin x \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot \cos x \cdot 2 \sin x}{\sin^4 x} =$$
$$= -\frac{\sin^2 x - 2}{\sin^3 x} = -\frac{(\sin x - \sqrt{2})(\sin x + \sqrt{2})}{\sin^3 x}, x \in D(f')$$

Výraz $\sin x - \sqrt{2}$ je vždy záporný, protože $\sin x$ nabývá hodnot mezi -1 a 1 a $1 < \sqrt{2}$ a naopak výraz $\sin x + \sqrt{2}$ je vždy kladný. Stačí nám tedy zjistit, kdy je $\sin^3 x > 0$ a kdy je $\sin^3 < 0$. Nerovnice $\sin^3 x > 0$ je splněna pro všechna x na každém intervalu $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a nerovnice $\sin^3 x < 0$ je splněna pro všechna x na každém intervalu $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Závěr: Funkce f je ryze konvexní na intervalech $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ a ryze konkávní na intervalech $(\pi + 2k\pi, 2k\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Funkce f nemá žádné inflexní body.

Úloha 5. Určete čísla a, b tak, aby funkce $f(x) = x^3 - ax^2 + 2x - b$ měla inflexní bod v $I = [1, 2]$. (Gillman a Mcdowell 1980, s. 155)

Řešení. Využijeme větu 15. Protože bod $I = [1, 2]$ má být inflexním bodem, tak musí být $f''(1) = 0$. Provedeme první a druhou derivaci funkce f:

$$f'(x) = (x^3 - ax^2 + 2x - b)' = 3x^2 - 2ax + 2,$$
$$f''(x) = (3x^2 - 2ax + 2)' = 6x - 2a.$$

Z rovnosti $f''(1) = 6 \cdot 1 - 2a = 0$ získáváme $a = 3$. Protože bod I je bodem funkce, dosazením souřadnic $[x, y] = [1, 2]$ do předpisu funkce dostáváme lineární rovnici o jedné neznámé:

$$2 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - b.$$

Získáváme $b = -2$.

Snadno si můžeme ověřit, že naše řešení je správné. Dle věty 14 je funkce f konvexní na intervalu $\langle 1, \infty)$, protože nerovnost $6x - 6 > 0$ je splněna právě pro všechna $x \in \langle 1, \infty)$ a zároveň je funkce f konkávní na intervalu $(-\infty, 1\rangle$, protože nerovnost $6x - 6 < 0$ je splněna pro všechna $x \in (-\infty, 1\rangle$.

Závěr: Aby bod $I = [1, 2]$ byl inflexním bodem funkce $f(x) = x^3 - ax^2 + 2x - b$, musí být $a = 3$ a $b = -2$.

Úloha 6. Ukažte, že je-li počátek kartézské soustavy souřadnic inflexním bodem funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, pak je její graf symetrický podle počátku tj. $f(-x) = -f(x)$. (Gillman a Mcdowell 1980, s. 155)

Řešení. Chceme ukázat, že pokud je bod $P = [0, 0]$ inflexním bodem funkce f, tak je funkce lichá, tedy platí vztah $f(-x) = -f(x)$. Protože bod P je bodem funkce f tak po dosazení do předpisu funkce získáváme: $f(x) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d$ z čehož plyne, že $d = 0$. Dle věty 15 pro bod P platí $f''(0) = 0$. Vypočteme $f''(0)$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$f''(x) = 6ax + 2b.$$

Dosadíme $x = 0$:

$$f''(0) = 6a \cdot 0 + 2b.$$

Z toho plyne, že $b = 0$. Tedy $f(x) = ax^3 + cx$. Ověříme, že je funkce f lichá, nejříve vypočteme $f(-x)$:

$$f(-x) = a(-x)^3 + c(-x),$$
$$f(-x) = -ax^3 - cx.$$

Vypočteme $-f(x)$:

$$-f(x) = -(ax^3 + cx),$$
$$-f(x) = -ax^3 - cx.$$

Závěr: Vidíme, že:

$$f(-x) = -ax^3 - cx = f(-x).$$

Což jme chtěli ukázat.

Úloha 7. Ukažte, že pro libovolné koeficienty a, b funkce $y = x^4 + ax + b$ nemá inflexní body. (Gillman a Mcdowell 1980, s. 156)

Řešení. Hledáme takový bod s okolím takovým, že na nějakém pravém okolí je funkce ryze konvexní a nějakém levém okolí je funkce ryze konkávní, či naopak. Využijeme větu 14 díky které zjistíme, kde je funkce f ryze konvexní či ryze konkávní. Zjistíme $f''(x)$:

$$f'(x) = 4x^3 + a,$$
$$f''(x) = 12x^2.$$

Řešením nerovnice $f''(x) > 0$ jsou všechna reálná čísla.

Závěr: Dle věty 14 je funkce f ryze konvexní na celém $D(f)$ z čehož plyne že nemá inflexní body.

Úloha 8. Dokažte, že pro všecha $x > 1$ platí nerovnost:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}. \text{ (Töpfer 2016, s. 3)}$$

Řešení. Úloha lze řešit snadno roznásobením, protože všechny jmenovatele s ohledem na podmínku $x > 1$ jsou kladné. My si ukážeme jiné řešení s využitím Jensenovy nerovnosti. Zvolme funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Dle věty 14 je funkce f ryze konvexní na intervalu $(0, \infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$. Zvolme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{x}$ a $x_1 = x-1$, $x_2 = x$, $x_3 = x+1$. Tyto předpoklady aplikujeme na větu 4.1, tedy platí:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot (x-1) + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot (x+1)}.$$

Nerovnost vynásobíme 3 a jmenovatel na pravé straně nerovnosti upravíme:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{\frac{1}{3}(x-1+x+x+1)},$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{\frac{1}{3} \cdot (3x)}.$$

Závěr: Poslední nerovnost je ekvivalentní s dokazovanou nerovností a tedy pro všechna $x > 1$ platí:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x}.$$

Úloha 9. Nechť jsou α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku. Dokažte, že platí nerovnost:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}. \text{ (Töpfer 2016, s. 4)}$$

Řešení. Tato úloha by algebraickými úpravami mohla být složitější než použití právě Jensenovy nerovnosti. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180ř, tedy:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180\text{ř} = \pi.$$

Zvolme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$, dále zvolme $x_1 = \frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \frac{\beta}{2}$, $x_3 = \frac{\gamma}{2}$. Platí, že $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ a funkce $f(x) = \sin x$ je dle věty 14 na intervalu $(0, \pi)$ konkávní. Dle Jensenovy nerovnosti tedy platí:

$$\frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{\beta}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \sin\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right).$$

Provedením algebraických úprav docházíme k dokazované nerovnosti:

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6},$$
$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right) \leq \sin\frac{\pi}{6},$$
$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Závěr: Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností, kterou jsme chtěli dokázat, tedy pro velikosti vnitřních úhlů α, β, γ platí:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Úloha 10. Dokažte, že pro všechna přípustná $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leq 12. \text{ (Töpfer 2016, s. 4)}$$

Řešení. Určíme definiční obor funkcí v jejichž průniku pak budeme úlohu řešit. Musí platit:

$$x + 1 \geq 0 \ \wedge \ 2x - 3 \geq 0 \ \wedge \ 50 - 3x \geq 0.$$

Zadanou nerovnost budeme řešit v intervalu $\langle \frac{50}{3}, \infty)$.

Využijeme Jensenovu nerovnost. Zvolme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$. Dále zvolme $x_1 = x + 1$, $x_2 = 2x - 3$ a $x_3 = 50 - 3x$. Mějme funkci $f(x) = \sqrt{x}$, která je na intervalu $\langle 0, \infty)$ konkávní dle věty 14. Dle Jensenovy nerovnosti tedy platí:

$$\frac{1}{3}\sqrt{x+1} + \frac{1}{3}\sqrt{2x-3} + \frac{1}{3}\sqrt{50-3x} \leq \sqrt{\frac{1}{3}(x+1) + \frac{1}{3}(2x-3) + \frac{1}{3}(50-3x)}.$$

Nerovnost upravíme:

$$\frac{1}{3}(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}) \leq \sqrt{\frac{1}{3}(x+1+2x-3+50-3x)},$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}) \leq 3\sqrt{\frac{1}{3}(48)}.$$

Závěr: Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností, kterou chceme dokázat, tedy pro všechna x platí:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x} \leq 12.$$

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit výukový materiál včetně řešených příkladů na téma konvexní a konkávní funkce. Tento text je určený pro žáky středních škol výběrového semináře či pro studenty bakalářského studia vysokých škol.

Hlavním přínosem je, že samotná práce může být využita jako učební text ke konvexním a konkávním funkcím, ať už při výuce, nebo při samostudiu. V celé práci jsou zahrnuty obrázky sloužící pro snadnější pochopení uvedených definic a vět.

Záměrem bylo srozumitelně vysvětlit pojmy týkající se tématu tak, aby byl text snadno přístupný a pochopitelný jak žákům středních škol, tak studentům vysokých škol v oboru matematika.

Práci jsme strukturovali tak, aby mezi všemi pojmy byla logická návaznost. Nejdříve jsme ujasnili základní pojmy, poté jsme interpretovali konvexní a konkávní funkce, ukázali jejich vztah k derivaci a nakonec jsme konvexní a konkávní funkce využili jak v matematických důkazech, tak v různých úlohách. V řešených úlohách jsme využili znalostí získaných z předešlých kapitol práce.

Stanovený cíl této práce byl naplněn.

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N}$ množina přirozených čísel

$\mathbb{Z}$ množina celých čísel

$\mathbb{R}$ množina reálných čísel

$\mathbb{R}^+$ množina kladných reálných čísel

$D(f)$ definiční obor funkce f

$H(f)$ obor hodnot funkce f

$+\infty$ plus nekonečno

$-\infty$ mínus nekonečno

(a, b) otevřený interval od a do b

$\langle a, b\rangle$ uzavřený interval od a do b

$[a, b]$ uspořádaná dvojice bodů a, b

$X \subset Y$ množina X je vlastní podmnožinou množiny Y

$X \subseteq Y$ množina X je podmnožinou množiny Y (inkluze)

$\varphi_f(a, b)$ směrnice sečny grafu funkce f procházející body $A = [a, f(a)]$, $B = [b, f(b)]$

$|AB|$ úsečka s krajními body A a B

Seznam použité literatury

DLOUHÝ, Zbyněk, Karel HRUŠA, Jiří KŮST, Jiří ROHLÍČEK a Josef ZIERIS. *Úvod do matematické analýzy.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.

DOŠLÁ, Zuzana a Jaromír KUBEN. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.* Brno: Masarykova univerzita, 2003.

GILLMAN, Leonard a Robert H. MCDOWELL. *Matematická analýza.* Praha: SNTL, 1980. Teoretická knižnice inženýra.

GREBENČA, Michail Kuz'mič a Sergej Iosifovič NOVOSELOV. *Učebnice matematické analysy.* 1. [díl]. Praha: ČSAV, 1955. Práce Československé akademie věd. Sekce matematicko-fysikální.

NICULESCU, Constantin P. a Lars-Erik PERSSON. Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach. USA: Springer Science+Business Media, 2006.

NOVÁK, Vítězslav. *Diferenciální počet v R.* 2. přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1997.

TÖPFER, Martin. Jensenova nerovnost. In: *Matematický korespondenční seminář* [online]. 2016, s. 6 [cit. 2020-07-12]. Dostupné z: https://prase.cz/index.php.

VESELÝ, Jiří. Matematická analýza pro učitele: První díl. 2. vyd. Praha: MATFYZPRESS, 2001.